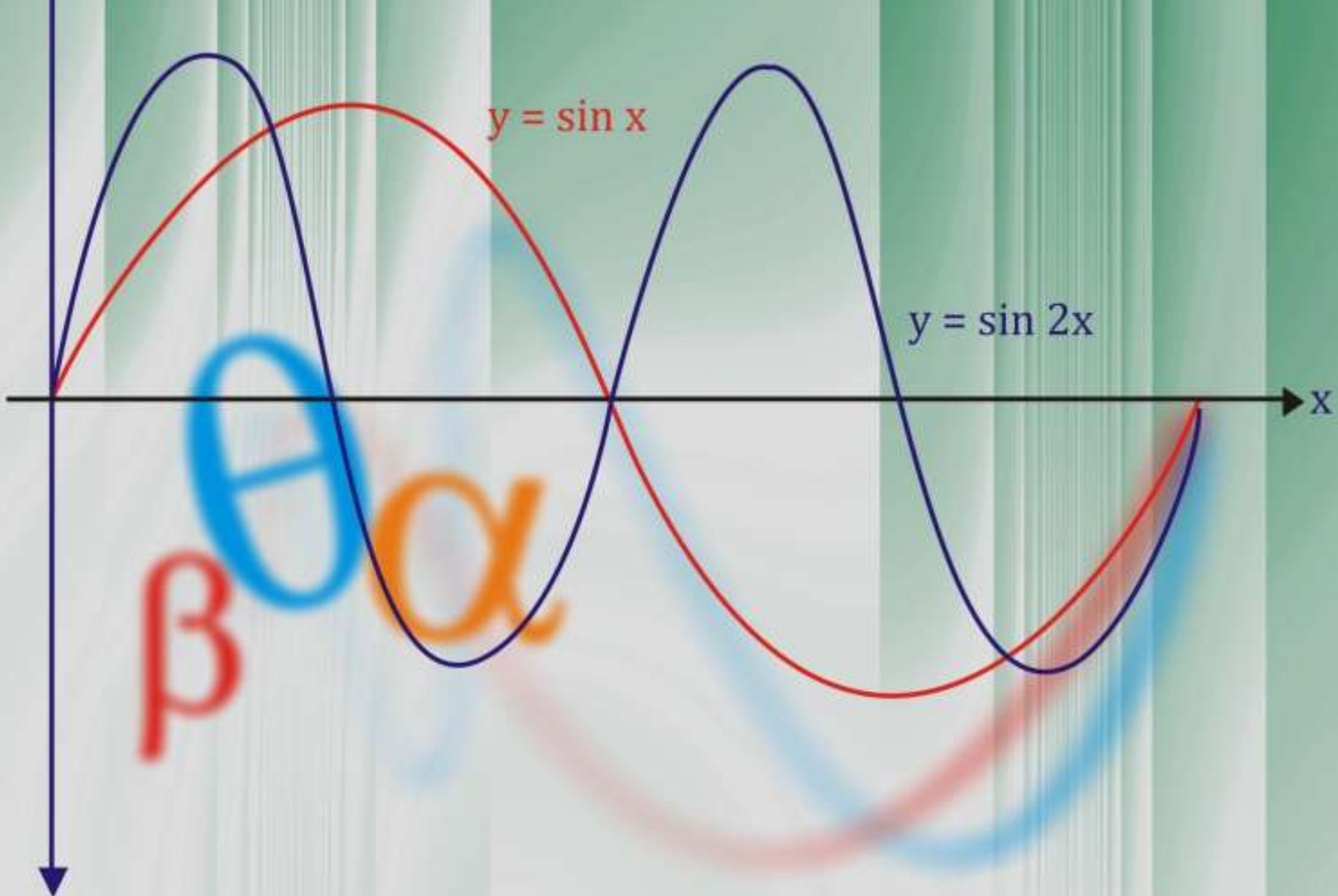
RISTEKDIKTI

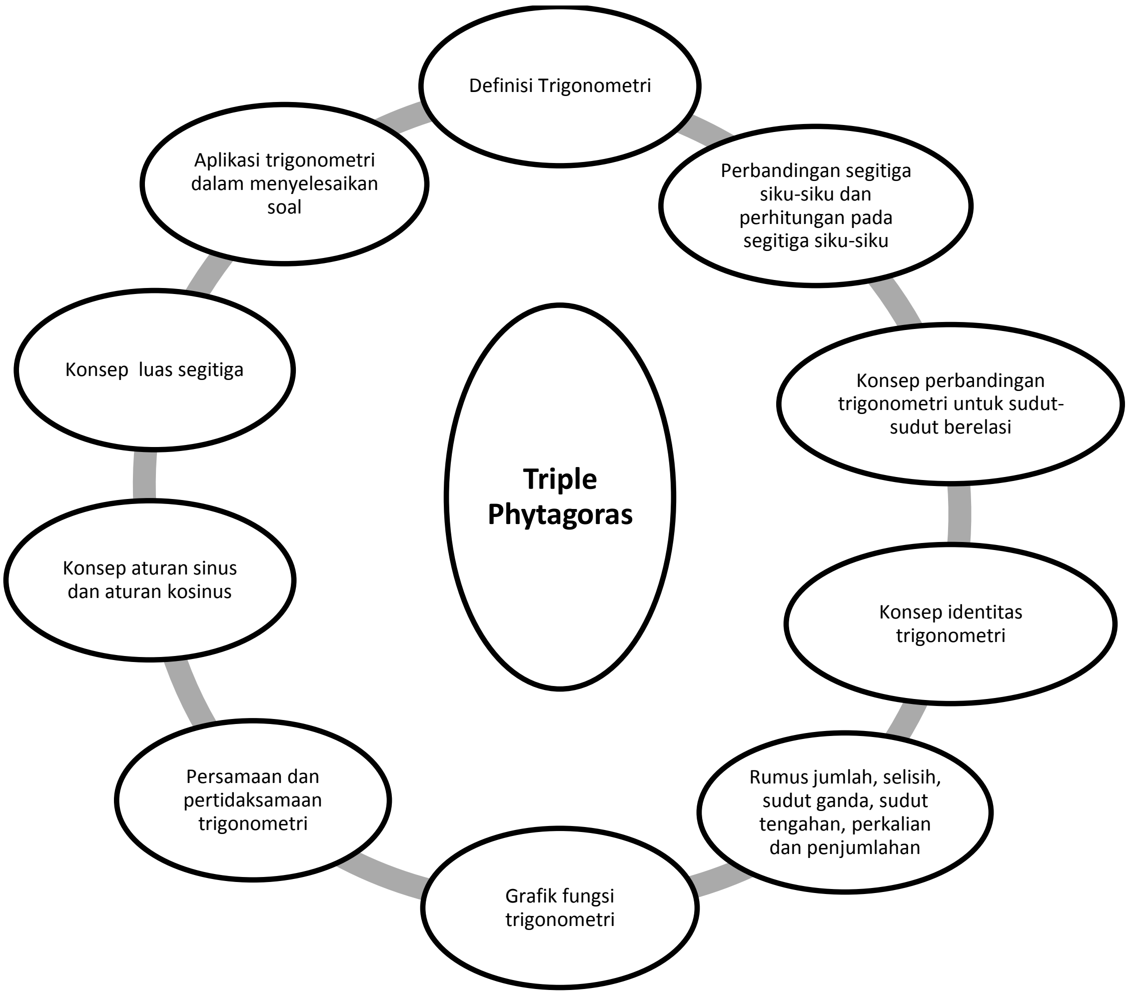
BAHAN AJAR TRIGONOMETRI



Puji Nurfauziah

Veny Triyana Andika Sari

TRIGONOMETRI



A. Definisi Trigonometri

Trigonometri merupakan salah satu ilmu yang berhubungan dengan besar sudut. Trigonometri berasal dari bahasa yunani yaitu *trigonon* yang berarti tiga sudut dan *metron* yang berarti mengukur. Jadi dapat dikatakan bahwa trigonometri membahas mengenai sudut-sudut yang berada di dalam segitiga. Sebelum membahas trigonometri lebih jauh, konsep dasar yang harus difahami dalam trigonometri yaitu konsep triple phytagoras, konsep dasar segitiga yang terdiri dari tiga buah sisi (sisi miring, sisi samping, dan sisi depan), jumlah suatu sudut dalam segitiga 180^o. Setelah memahami konsep tersebut, konsep - konsep yang selanjutnya perlu difahami adalah Perbandingan segitiga siku-siku dan perhitungan pada segitiga siku-siku; Konsep perbandingan trigonometri untuk sudut-sudut berelasi; Rumus jumlah, selisih, sudut ganda, sudut tengahan, perkalian dan penjumlahan; Konsep identitas trigonometri; Grafik fungsi trigonometri; Persamaan dan pertidaksamaan trigonometri; Konsep aturan sinus dan aturan kosinus; Konsep luas segitiga; Aplikasi trigonometri dalam menyelesaikan soal.

Dalam pembicaraan tentang trigonometri, tidak lepas dari konsep sebuah sudut, karena dalam fungsi trigonometri domain fungsi tersebut berupa sudut. Sebuah sudut dihasilkan oleh putaran sebuah sinar terhadap titik pangkalnya. Terdapat beberapa satuan untuk menyatakan besar sudut :

- Derajat siksagesimal, dimana satu putaran penuh dibagi menjadi 360 bagian yang sama. Setiap bagian disebut 1^o . Sehingga satu putaran penuh = 360^o
- Radian, Satu radian adalah besarnya sudut yang menghadap busur lingkaran yang panjangnya sama dengan jari-jari.

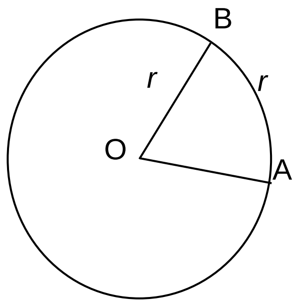
$\angle$ AOB = 1 rad, Hubungan radian dengan derajat

$360^\circ = \dfrac{2\pi r}{r}$ rad

$= 2\pi$ rad

$180^\circ = \pi$ rad

pendekatan 1 rad = $57{,}3^\circ$.



Gambar 1

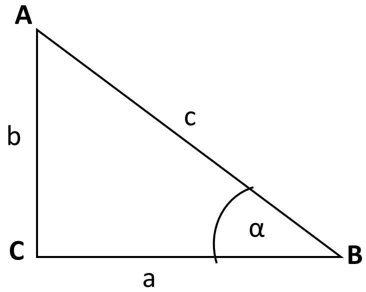
LATIHAN

1. Jika 210^O dinyatakan dalam radian, maka hasilnya adalah.........
2. $0{,}4\ \pi$ radian sama dengan....
3. $\frac{3}{4}\pi$ radian sama dengan....
4. 225^O jika di rubah ke dalam bentuk radian adalah ....
5. $2\frac{3}{5}\pi$ radian sama dengan......

B. Perbandingan Segitiga Siku-Siku dan Perhitungan pada Segitiga Siku-Siku

1. Perbandingan Segitiga Siku-Siku

Gambar segitiga ABC dibawah ini merupakan segitiga siku-siku. Berdasarkan gambar tersebut dapat terlihat bahwa sisi depan sudut α adalah b atau AC, sisi samping dari sudut α adalah a atau BC, dan sisi miring dari sudut α adalah c atau AB.



Gambar 2

Sin α = $\frac{sisi\ depan\ sudut\ \alpha}{sisi\ miring\ sudut\ \alpha} = \frac{b}{c} = \frac{AC}{AB}$

Cos α = $\frac{sisi\ samping\ sudut\ \alpha}{sisi\ miring\ sudut\ \alpha} = \frac{\square}{\square} = \frac{\square}{\square}$

Tan α = $\frac{sisi\ depan\ sudut\ \alpha}{sisi\ samping\ sudut\ \alpha} = \frac{\square}{\square} = \frac{\square}{\square}$

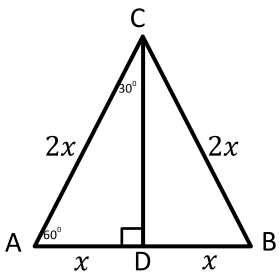
Sec α = $\frac{sisi\ miring\ sudut\ \alpha}{sisi\ samping\ sudut\ \alpha} = \frac{\square}{\square} = \frac{\square}{\square}$

Cosec α = $\frac{sisi\ miring\ sudut\ \alpha}{sisi\ depan\ sudut\ \alpha} = \frac{\square}{\square} = \frac{\square}{\square}$

Cotan α = $\frac{sisi\ samping\ sudut\ \alpha}{sisi\ depan\ sudut\ \alpha} = \frac{\square}{\square} = \frac{\square}{\square}$

2. Nilai Perbandingan Trigonometri untuk Sudut Istimewa

a. Sudut 30° dan 60°



Gambar 3

Gambar diatas merupakan gambar segitiga sama sisi ABC, dimana titik D merupakan titik tengah dari AB. Jika dari titik D ditarik garis yang tegak lurus AB ke C, maka segitiga tersebut terbagi menjadi dua segitiga sama besar, dan menjadi dua buah segitiga siku-siku yang kongruen. Panjang AB = BC = CA = $2x$ satuan, sehingga AD = DB = x satuan.

Berdasarkan rumus phytagoras,

$CD^2 = AC^2 - AD^2$

$CD^2 = (2x)^2 - (x)^2$

$CD^2 = 4x^2 - x^2$

$CD^2 = 3x^2$

$CD = \sqrt{3x}$

Sin 30^0= $\frac{sisi\ depan\ sudut\ \alpha}{sisi\ miring\ sudut\ \alpha} = \frac{x}{2x} = \frac{1}{2}$

Cos 30^0 = $\frac{sisi\ samping\ sudut\ \alpha}{sisi\ miring\ sudut\ \alpha} = \frac{\square}{\square} = \frac{\square}{\square}$

Tan 30^0 = $\frac{sisi\ depan\ sudut\ \alpha}{sisi\ samping\ sudut\ \alpha} = \frac{\square}{\square} = \frac{\square}{\square}$

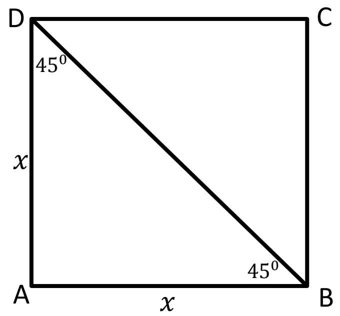
Sec 30^0 = $\frac{sisi\ miring\ sudut\ \alpha}{sisi\ samping\ sudut\ \alpha} = \frac{\square}{\square} = \frac{\square}{\square}$

Cosec 30^0 = $\frac{sisi\ miring\ sudut\ \alpha}{sisi\ depan\ sudut\ \alpha} = \frac{\square}{\square} = \frac{\square}{\square}$

Cotan 30^0 = $\frac{sisi\ samping\ sudut\ \alpha}{sisi\ depan\ sudut\ \alpha} = \frac{\square}{\square} = \frac{\square}{\square}$

Sin $60^0 = \frac{sisi\ depan\ sudut\ \alpha}{sisi\ miring\ sudut\ \alpha} = \frac{x}{2x} = \frac{1}{2}$	Sec $60^0 = \frac{sisi\ miring\ sudut\ \alpha}{sisi\ samping\ sudut\ \alpha} = \frac{\square}{\square} = \frac{\square}{\square}$
Cos $60^0 = \frac{sisi\ samping\ sudut\ \alpha}{sisi\ miring\ sudut\ \alpha} = \frac{\square}{\square} = \frac{\square}{\square}$	Cosec $60^0 = \frac{sisi\ miring\ sudut\ \alpha}{sisi\ depan\ sudut\ \alpha} = \frac{\square}{\square} = \frac{\square}{\square}$
Tan $60^0 = \frac{sisi\ depan\ sudut\ \alpha}{sisi\ samping\ sudut\ \alpha} = \frac{\square}{\square} = \frac{\square}{\square}$	Cotan $60^0 = \frac{sisi\ samping\ sudut\ \alpha}{sisi\ depan\ sudut\ \alpha} = \frac{\square}{\square} = \frac{\square}{\square}$

b. Sudut 45°



Gambar 4

Gambar diatas merupakan gambar sebuah persegi ABCD. Berdasarkan gambar tersebut, dari titik B ditarik garis diagonal ke titik C. oleh karena hal tersebut, persegi ABCD terbagi menjadi dua buah segitiga siku-siku yang kongruen, dan memiliki dua buah sisi yang sama AB = AD = x. Berdasarkan teorema phytagoras:

$BD^2 = AB^2 + AD^2$

$BD^2 = x^2 + x^2$

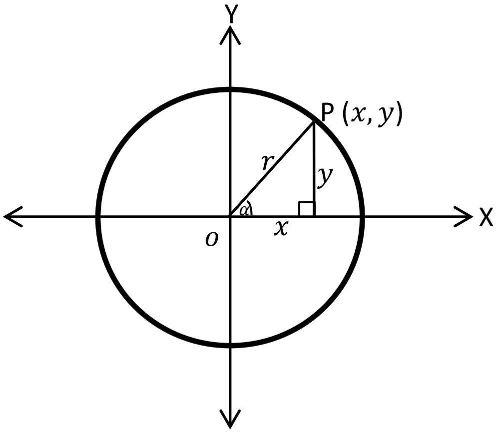
$BD^2 = 2x^2$

$BD = \sqrt{2x^2}$

$BD = x\sqrt{2}$

Sin $45^0 = \frac{sisi\ depan\ sudut\ \alpha}{sisi\ miring\ sudut\ \alpha} = \frac{x}{x\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$	Sec $45^0 = \frac{sisi\ miring\ sudut\ \alpha}{sisi\ samping\ sudut\ \alpha} = \frac{\square}{\square} = \frac{\square}{\square}$
Cos $45^0 = \frac{sisi\ samping\ sudut\ \alpha}{sisi\ miring\ sudut\ \alpha} = \frac{\square}{\square} = \frac{\square}{\square}$	Cosec $45^0 = \frac{sisi\ miring\ sudut\ \alpha}{sisi\ depan\ sudut\ \alpha} = \frac{\square}{\square} = \frac{\square}{\square}$
Tan $45^0 = \frac{sisi\ depan\ sudut\ \alpha}{sisi\ samping\ sudut\ \alpha} = \frac{\square}{\square} = \frac{\square}{\square}$	Cotan $45^0 = \frac{sisi\ samping\ sudut\ \alpha}{sisi\ depan\ sudut\ \alpha} = \frac{\square}{\square} = \frac{\square}{\square}$

c. Sudut 0° dan 90°



Gambar 5

Jika titik P(x, y) mendekati sumbu X dan berhimpit dengan sumbu X, maka $x = r$, $\angle\alpha = 0^0$, $y = 0$. Maka:

$$\text{Sin } 0^0 = \frac{sisi\ depan\ sudut\ \alpha}{sisi\ miring\ sudut\ \alpha} = \frac{0}{r} = 0$$

$$\text{Cos } 0^0 = \frac{sisi\ samping\ sudut\ \alpha}{sisi\ miring\ sudut\ \alpha} = \frac{\square}{\square} = \frac{\square}{\square}$$

$$\text{Tan } 0^0 = \frac{sisi\ depan\ sudut\ \alpha}{sisi\ samping\ sudut\ \alpha} = \frac{\square}{\square} = \frac{\square}{\square}$$

$$\text{Sec } 0^0 = \frac{sisi\ miring\ sudut\ \alpha}{sisi\ samping\ sudut\ \alpha} = \frac{\square}{\square} = \frac{\square}{\square}$$

$$\text{Cosec } 0^0 = \frac{sisi\ miring\ sudut\ \alpha}{sisi\ depan\ sudut\ \alpha} = \frac{\square}{\square} = \frac{\square}{\square}$$

$$\text{Cotan } 0^0 = \frac{sisi\ samping\ sudut\ \alpha}{sisi\ depan\ sudut\ \alpha} = \frac{\square}{\square} = \frac{\square}{\square}$$

Jika titik P(x, y) mendekati sumbu Y dan berhimpit dengan sumbu Y, maka $y = r$, $\angle\alpha = 90^0$, $x = 0$. Maka:

$$\text{Sin } 90^0 = \frac{sisi\ depan\ sudut\ \alpha}{sisi\ miring\ sudut\ \alpha} = \frac{r}{r} = 1$$

$$\text{Cos } 90^0 = \frac{sisi\ samping\ sudut\ \alpha}{sisi\ miring\ sudut\ \alpha} = \frac{\square}{\square} = \frac{\square}{\square}$$

$$\text{Tan } 90^0 = \frac{sisi\ depan\ sudut\ \alpha}{sisi\ samping\ sudut\ \alpha} = \frac{\square}{\square} = \frac{\square}{\square}$$

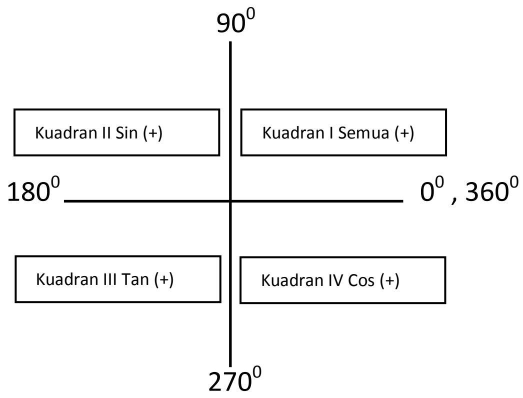
$$\text{Sec } 90^0 = \frac{sisi\ miring\ sudut\ \alpha}{sisi\ samping\ sudut\ \alpha} = \frac{\square}{\square} = \frac{\square}{\square}$$

$$\text{Cosec } 90^0 = \frac{sisi\ miring\ sudut\ \alpha}{sisi\ depan\ sudut\ \alpha} = \frac{\square}{\square} = \frac{\square}{\square}$$

$$\text{Cotan } 90^0 = \frac{sisi\ samping\ sudut\ \alpha}{sisi\ depan\ sudut\ \alpha} = \frac{\square}{\square} = \frac{\square}{\square}$$

	0°	**30°**	**45°**	**60°**	**90°**	**120°**	**135°**	**150°**	**180°**
Sin									
Cos									
Tan									
Sec									
Cosec									
Cotan									

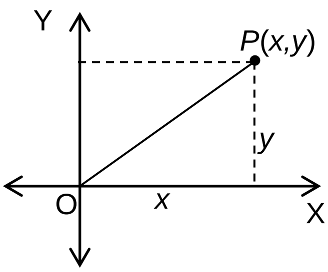
	210°	225°	240°	270°	300°	315°	330°	360°
Sin								
Cos								
Tan								
Sec								
Cosec								
Cotan								



Gambar 6

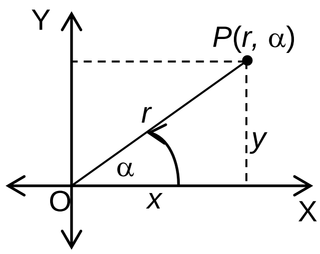
3. Koordinat Kartesius dan Koordinat Kutub

Cara lain dalam menyajikan letak sebuah titik pada bidang *xy* selain koordinat kartesius adalah dengan koordinat kutub.



Koordinat kartesius

Gambar 7



Koordinat kutub

Gambar 8

Pada gambar 3.1, titik $P(x,y)$ pada koordinat kartesius dapat disajikan dalam koordinat kutub dengan $P(r, \alpha)$ seperti pada gambar 3.2. Jika koordinat kutub titik $P(r, \alpha)$ diketahui, maka koordinat kartesius dapat dicari dengan hubungan:

$$\cos\alpha = \frac{x}{r} \rightarrow x = rcos\alpha$$

Sehingga koordinat kutubnya adalah:

$$P\ (rcos\alpha, rsin\alpha)$$

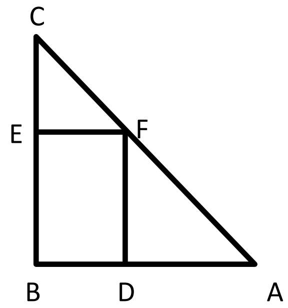
$$\sin\alpha = \frac{y}{r} \rightarrow y = r sin\alpha$$

LATIHAN

1. Jika diketahui koordinat kartesius titik P(6,-6) maka koordinat kutubnya adalah .....
2. Jika diketahui koordinat kutub titik P$(6\sqrt{2}, 315^0)$ maka koordinat kartesiusnya adalah.....
3. Koordinat kartesius dari titik A (4, 210^0) adalah .....
4. Koordinat kutub dari (-3,-3) adalah ....

4. Perhitungan pada Segitiga Siku-siku

1. Diketahui segitiga *ABC* siku-siku di *C* , sudut di *A* adalah α, jika *Cos* α = $\frac{4}{5}$. Tentukan perbandingan *Sin* α dan *tan* α.
2. Pada gambar adalah segitiga siku-siku di titik B dengan panjang sisi AD = 4 , AF=6, FC = 3 ,CE = 3 . Berapakah panjang sisi BD dan BE ?



3. Dalam ΔABC diketahui bahwa cos $\angle A$ = $\frac{3}{5}$ dan cos $\angle B$ = $\frac{12}{13}$. Berapakah nilai cos $\angle C$?
4. Dengan menggunakan gambar segitiga siku-siku dan α salah satu sudutnya, hitunglah perbandingan trigonometri yang belum diketahui.

   a. sin α =*p* b. tan α =*s* c. cos α = *q*
5. Diketahui sin$\alpha = \frac{5}{13}$ dan sin $\beta = \frac{3}{5}$ dengan α sudut lancip dan β sudut tumpul. Hitunglah:

   a. Sin $(\alpha+\beta)$ b. cos $(\alpha+\beta)$ c. tan $(\alpha+\beta)$
6. Diberikan sin α = 0,6 dan cos $\beta = -\frac{5}{13}$, dengan α sudut lancip dan β sudut tumpul. Hitunglah:

   b. Sin $(\alpha+\beta)$ b. cos $(\alpha+\beta)$ c. tan $(\alpha+\beta)$ d. cot $(\alpha+\beta)$
7. Jika A dan B masing-masing sudut lancip dengan sin A = 0,8 dan sin B = 0,28; tunjukan bahwa cos (A+B) = $\frac{44}{125}$
8. Jika sin α = 0,4 dan α berada di kuadran II, maka tan α adalah ....
9. Jika tan α = $\frac{3}{4}$ dan berada di kuadran III, maka cos α adalah .....

C. Konsep Perbandingan Trigonometri untuk Sudut Berelasi

Sudut-sudut yang berelasi dengan sudut α adalah sudut $(90 \pm \alpha)°$, $(180 \pm \alpha)°$, $(360 \pm \alpha)°$, dan $-\alpha°$. Dua buah sudut yang berelasi ada yang diberi nama khusus, misalnya **penyiku** (komplemen) yaitu untuk sudut $\alpha°$ dengan $(90 - \alpha)°$ dan **pelurus** (suplemen) untuk sudut $\alpha°$ dengan $(180 - \alpha)°$.

1. Perbandingan Trigonometri untuk Sudut α dengan $(90 - \alpha)°$

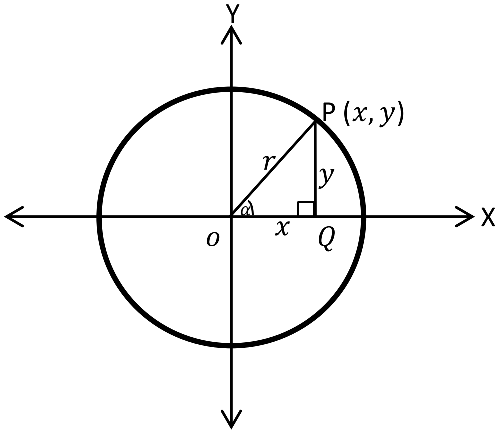
Segitiga OPQ merupakan sebuah segitiga siku-siku, dengan siku-siku di Q. Dimana $\angle O = \alpha, \angle Q = 90°, \angle R = 90° - \alpha$

$O + P + Q = 180°$

$\alpha + P + 90° = 180°$

$P = 180° - 90° - \alpha$

$P = 90° - \alpha$



Gambar 9

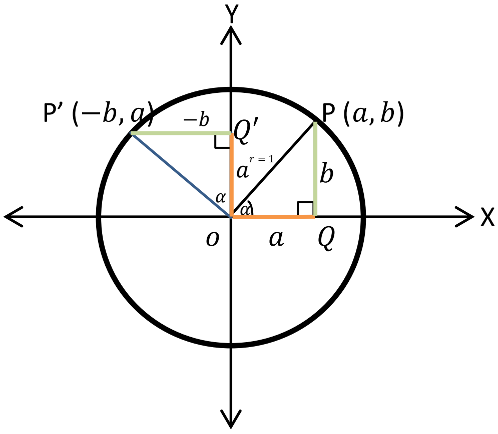
$sin(90 - \alpha)° = \frac{OQ}{OP} = cos\ \alpha$	$sec(90 - \alpha)° = \frac{\square}{\square} =$
$cos(90 - \alpha)° = \frac{PQ}{OP} =$	$cosec(90 - \alpha)° = \frac{\square}{\square} =$
$tan(90 - \alpha)° = \frac{\square}{\square} =$	$cotan(90 - \alpha)° = \frac{\square}{\square} =$

LATIHAN

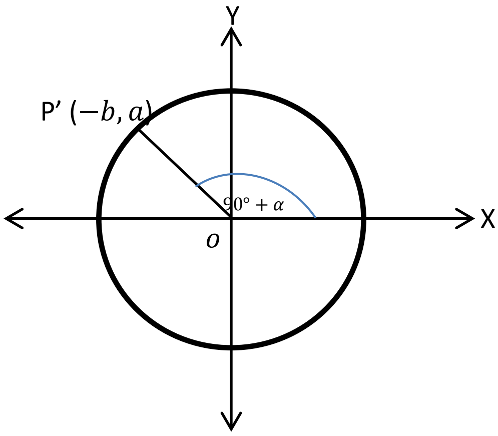
1. Dengan menggunakan sudut berelasi $(90 - \alpha)°$ tentukan nilai dari cos 45^0, sec 60^0, dan tan 45^0
2. Carilah nilai x yang memenuhi persamaan sin (2x+70)° = cos 40° !

3. Perbandingan Trigonometri untuk Sudut α dengan $(90 + \alpha)°$

Segitiga OP'Q' merupakan segitiga yang diputar 90^0 berlawanan arah jarum jam dari segitiga OPQ, dengan r = 1 (lingkaran dengan jari-jari 1). Berdasarkan gambar tersebut dapat diketahui bahwa P (a,b) sehingga P' (-b,a), posisi (-b,a) = posisi (a,b) pada posisi sebelum di rotasikan. Sehingga $\angle$QOP' = $90^0 + \alpha$ dan kedua segitiga terletak pada lingkaran dengan r = 1.



Gambar 10



Gambar 11

Amati segitiga OPQ, dimana P (a,b)

$sin\alpha = \frac{b}{1} = b$

$cos\alpha = \frac{a}{1} = a$

$cot\alpha = \frac{a}{b}$

Amati segitiga OP'Q', dimana P'$(-b, a)$

$sin(90 + \alpha) = \frac{-b}{1} = -b \rightarrow -a \rightarrow a$ (sin di KII bernilai +)

$cos(90 + \alpha) = \frac{a}{1} = a \rightarrow b \rightarrow -b$ (cos di KII bernilai -)

$tan(90 + \alpha) = \frac{-b}{a} \rightarrow \frac{-a}{b}$

Maka dapat disimpulkan bahwa:

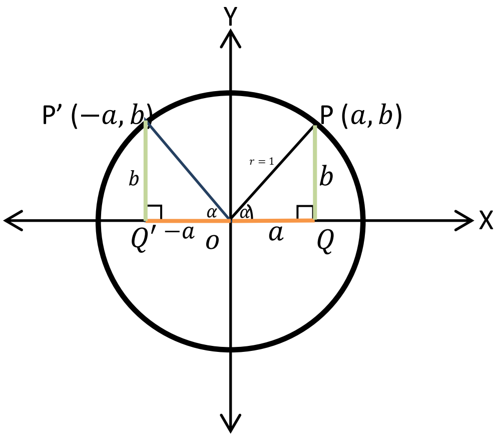
$sin(90 + \alpha)° =$	$sec(90 + \alpha)° =$
$cos(90 + \alpha)° =$	$cosec(90 + \alpha)° =$
$tan(90 + \alpha)° =$	$cotan(90 + \alpha)° =$

LATIHAN

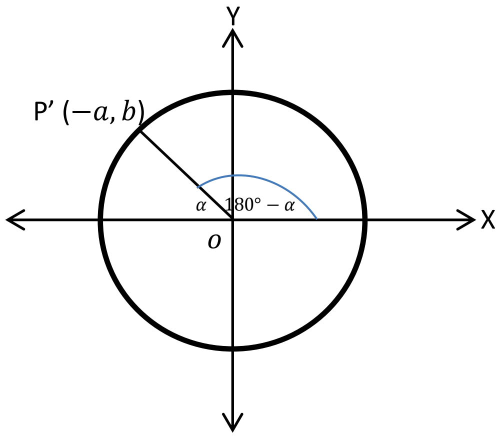
1. Tanpa menggunakan kalkulator, hitunglah $\frac{\sin 120^0 - cos135^0}{cos150^0 - sin150^0}$
2. Nyatakan setiap perbandingan trigonometri berikut dalam sudut 45^0
   1) Tan 135^0
   2) Sin 135^0
   3) Cosec 135^0
3. Tentukan nilai tg 120^0 dan cos 150^0 dengan menggunakan aturan sudut berelasi di kuadran II !

4. Perbandingan Trigonometri untuk Sudut α dengan ($180 - \alpha$) °

Segitiga OPQ dicerminkan terhadap sumbu Y sehingga menghasilkan segitiga OP'Q'. berdasarkan gambar tersebut dapat diketahui bahwa ∠QOP' = $180^o - \alpha$, dan kedua segitiga terletak pada lingkaran dengan r = 1.



Gambar 12



Gambar 13

Amati segitiga OPQ, dimana P (a,b)

$sin\alpha = \frac{b}{1} = b$

$cos\alpha = \frac{a}{1} = a$

$tan\alpha = \frac{b}{a}$

Amati segitiga OP'Q', dimana P'$(-a, b)$

$sin(180 - \alpha) = \frac{b}{1} = b$ (sin di KII bernilai +)

$cos(180 - \alpha) = \frac{-a}{1} = -a$

$tan(180 - \alpha) = \frac{b}{-a} \rightarrow -\frac{b}{a}$

Maka dapat disimpulkan bahwa:

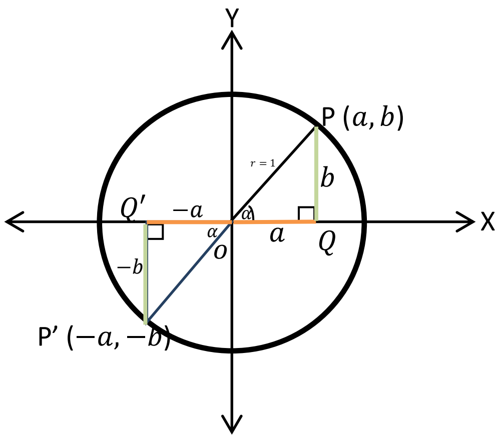
$sin(180 - \alpha)° =$	$sec(180 - \alpha)° =$
$cos(180 - \alpha)° =$	$cosec(180 - \alpha)° =$
$tan(180 - \alpha)° =$	$cotan(180 - \alpha)° =$

LATIHAN

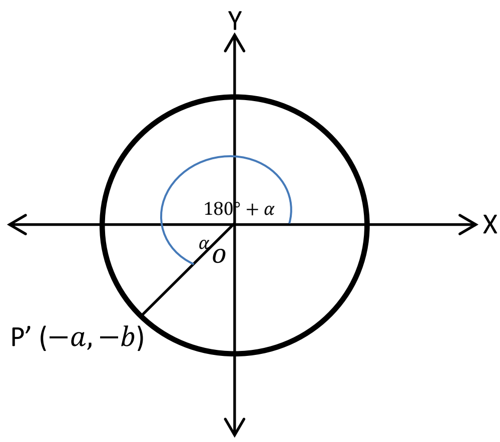
1. Carillah nilai sin 135°, cos 150°, dan tan 120° dengan menggunakan refleksi 180° !
2. Tentukan berapa nilai x yang memenuhi persamaan sin $(4x + 60)^o$ = sin 40^o !

5. Perbandingan Trigonometri untuk Sudut α dengan ($180 + \alpha$) °

Segitiga OP'Q' merupakan segitiga OPQ yang diputar sejauh 180^0 berlawanan arah jarum jam, sehingga ∠QOP' = 180^0 + α, dan kedua segitiga terletak pada lingkaran dengan r = 1.



Gambar 14



Gambar 15

Amati segitiga OPQ, dimana P (a,b)

$sin\alpha = \frac{b}{1} = b$

$cos\alpha = \frac{a}{1} = a$

$tan\alpha = \frac{b}{a}$

Amati segitiga OP'Q', dimana P'$(-a, -b)$

$sin(180 + \alpha) = \frac{-b}{1} = -b$

$cos(180 + \alpha) = \frac{-a}{1} = -a$

$tan(180 + \alpha) = \frac{-b}{-a} \rightarrow \frac{b}{a}$

Maka dapat disimpulkan bahwa:

$sin(180 + \alpha) =$	$sec(180 + \alpha) =$
$cos(180 + \alpha) =$	$cosec(180 + \alpha) =$
$tan(180 + \alpha) =$	$cotan(180 + \alpha) =$

LATIHAN

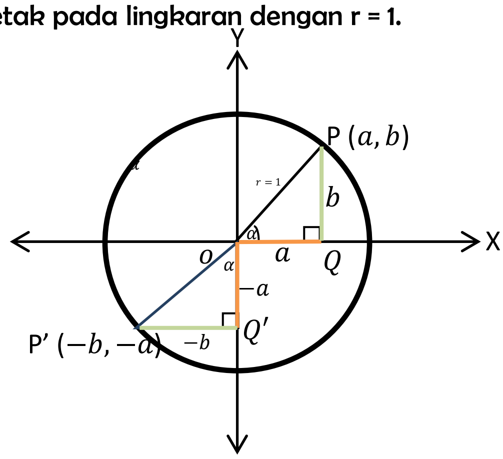
1. Jika cos x 3sinx, dan x terletak di kuadran III, maka nilai sinx.cos x adalah......
2. Hitunglah nilai dari perbandingan trigonometri berikut ini:
   a. Sin 270^0 + sin 120^0 + cos 225^0
   b. $\frac{tan225^0 + sin210^0}{cos270^0 - cos210^0}$

3. Tentukan perbandingan trigonometri yang terletak di kuadran III pada titik:
   a. P(-15,16)

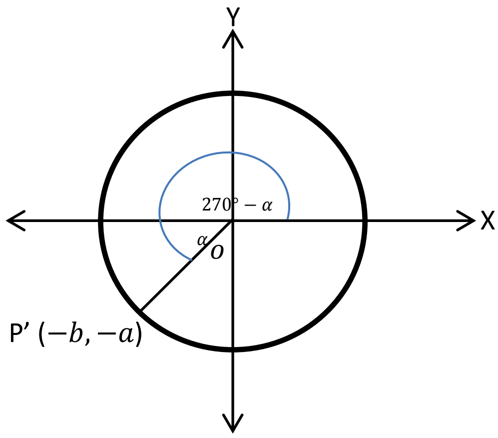
   b. P(7,-12)
   c. P(10,15)

6. Perbandingan Trigonometri untuk Sudut α dengan $(270 - \alpha)^\circ$

Segitiga OP'Q' merupakan segitiga OPQ yang diputar sejauh 90^0 searah jarum jam, dan selanjutnya dicerminkan terhadap sumbu Y. Sehingga ∠QOP' = 270^0 - α, dan kedua segitiga terletak pada lingkaran dengan r = 1.



Gambar 16



Gambar 17

Amati segitiga OPQ, dimana P (a,b)

$sin\alpha = \frac{b}{1} = b$

$cos\alpha = \frac{a}{1} = a$

$tan\alpha = \frac{b}{a}$

Amati segitiga OP'Q', dimana P'$(-b, -a)$

$sin(270 - \alpha) = \frac{-b}{1} = -b = -a$

$cos(270 - \alpha) = \frac{-a}{1} = -a = -b$

$tan(270 - \alpha) = \frac{-b}{-a} \to \frac{b}{a} = \frac{a}{b}$

Maka dapat disimpulkan bahwa:

$sin(270 - \alpha) =$	$sec(270 - \alpha) =$
$cos(270 - \alpha) =$	$cosec(270 - \alpha) =$
$tan(270 - \alpha) =$	$cotan(270 - \alpha) =$

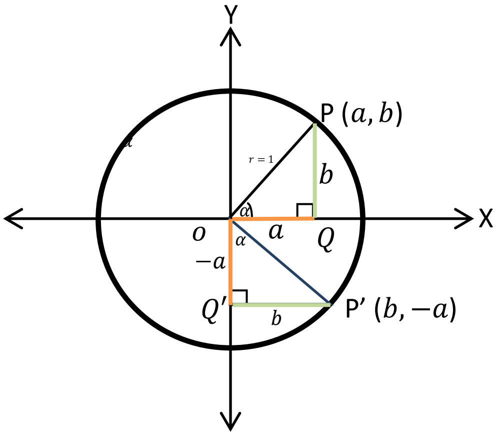
LATIHAN

1. Carilah nilai α jika sin $(270 - \alpha)^\circ = -\frac{1}{2}$

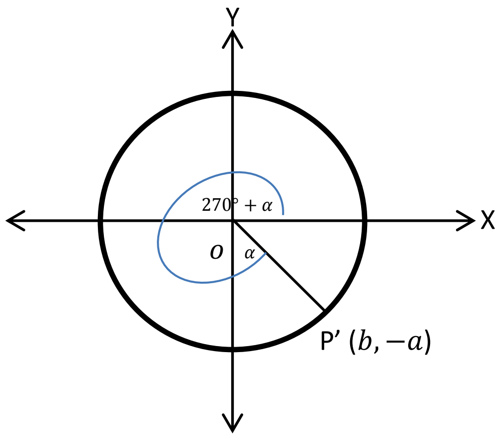
2. Dengan menggunakan sudut berelasi di kuadran III, maka buktikan bahwa sin (180 + α) = -sin α sama dengan sin (270 - α) = -cos α

7. Perbandingan Trigonometri untuk Sudut α dengan ($270° + \alpha$)

Segitiga OP'Q' merupakan segitiga OPQ yang diputar sejauh 90° searah jarum jam. Sehingga ∠QOP' = 270° + α, dan kedua segitiga terletak pada lingkaran dengan r = 1.



Gambar 18



Gambar 19

Amati segitiga OPQ, dimana P (a,b)

$sin\alpha = \frac{b}{1} = b$

$cos\alpha = \frac{a}{1} = a$

$tan\alpha = \frac{b}{a}$

Amati segitiga OP'Q', dimana P'$(-b, -a)$

$sin(270 + \alpha) = \frac{b}{1} = b = -a$

$cos(270 + \alpha) = \frac{-a}{1} = -a = b$

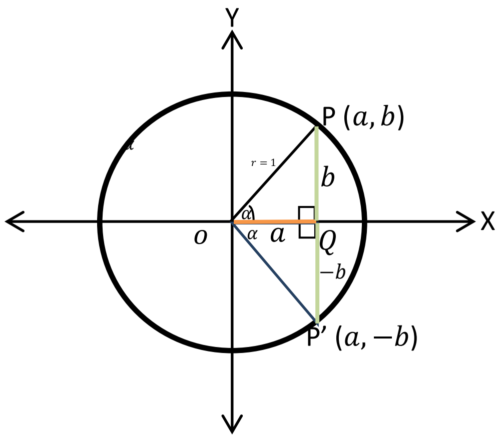
$tan(270 + \alpha) = \frac{b}{-a} \rightarrow -\frac{b}{a} = -\frac{a}{b}$

Maka dapat disimpulkan bahwa:

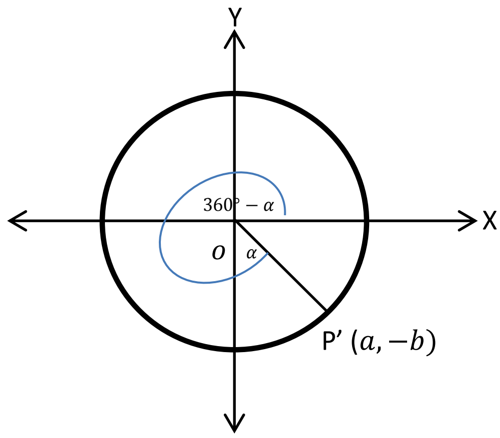
$sin(270 + \alpha) =$	$sec(270 + \alpha) =$
$cos(270 + \alpha) =$	$cosec(270 + \alpha) =$
$tan(270 + \alpha) =$	$cotan(270 + \alpha) =$

8. Perbandingan Trigonometri untuk Sudut α dengan ($360° - \alpha$) atau $-\alpha$

Segitiga OP'Q merupakan segitiga OPQ yang dicerminkan terhadap sumbu x. Sehingga ∠QOP' = 360^o - α, dan kedua segitiga terletak pada lingkaran dengan r = 1.



Gambar 20



Gambar 21

Amati segitiga OPQ, dimana P (a,b)

$sin\alpha = \frac{b}{1} = b$

$cos\alpha = \frac{a}{1} = a$

$tan\alpha = \frac{b}{a}$

Amati segitiga OP'Q, dimana P'($a, -b$)

$sin(360 - \alpha) = \frac{-b}{1} = -b$

$cos(360 - \alpha) = \frac{a}{1} = a$

$tan(360 - \alpha) = \frac{-b}{a} \to -\frac{b}{a}$

Maka dapat disimpulkan bahwa:

$sin(360 - \alpha) =$	$sec(360 - \alpha) =$
$cos(360 - \alpha) =$	$cosec(360 - \alpha) =$
$tan(360 - \alpha) =$	$cotan(360 - \alpha) =$

LATIHAN

1. Carilah nilai sin, cos, dan tan berikut ini dengan menggunakan refleksi 180^o dan 360^o
2. Jika sin x = $-\frac{1}{2}\sqrt{3}$ dan $0 < x < 2\pi$, maka x adalah.......
3. Tentukan nilai x yang memenuhi persamaan sin $(2x + 70)^o$ = cos
4. Jika tan x = $\sqrt{3}$ dan $0 < x < 2\pi$, maka x = ...

5. Dengan menggunakan sudut relasi sudut 270° dan 360° tentukan sec 300° dan tan 330°

D. Konsep Identitas Trigonometri

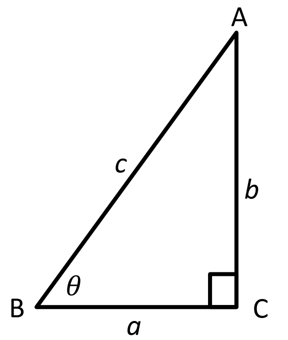
Identitas trigonometri diturunkan dari teorema phytagoras

$a^2 + b^2 = c^2$

$\frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = \frac{c^2}{c^2}$

$\frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = 1$

$$\boxed{cos^2\theta + sin^2\theta = 1}$$



Gambar 22

Berdasarkan konsep identitas yang telah didapat di atas, buktikan identitas trigonometri berikut:

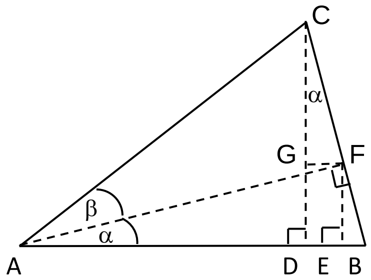
$tan\theta = \frac{sin\theta}{cos\theta}$	$tan^2\theta + 1 = sec^2\theta$	$1 + cot^2\theta = csc^2\theta$

LATIHAN

1. Buktikan $\frac{sin^2\alpha - sin^2\beta}{cos^2\alpha cos^2\beta} = tan^2\alpha - tan^2\beta$
2. Buktikan $(sin\alpha - cos\alpha)^2 = 1 - 2sin\alpha cos\alpha$
3. Buktikan $(tan\theta - cot\theta) = \frac{1-2cos^2\theta}{sin\theta cos\theta}$
4. Buktikan $\tan x sinx + cosx = sec\ x$
5. Buktikan $1 + cot^2\alpha = csc^2\alpha$

E. Rumus Jumlah, Selisih, Sudut Ganda, Sudut Tengahan, Perkalian dan Penjumlahan

1. Rumus Jumlah dan Selisih cos (α + β) dan cos (α − β)



Gambar 23

Pada gambar di samping diketahui garis CD dan AF keduanya adalah garis tinggi dari segitiga ABC. Akan dicari rumus cos (α + β).

$$\cos(\alpha+\beta)=\frac{AD}{AC} \quad \rightarrow \; AD = AC\cos(\alpha+\beta)$$

Pada segitiga siku–siku CGF

$$\sin\ \alpha = \frac{GF}{CF} \rightarrow GF = CF\sin\alpha \qquad \text{..............(1)}$$

Pada segitiga siku–siku AFC,

$$\sin\ \beta = \frac{CF}{AC} \rightarrow CF = AC\sin\beta \qquad \text{..............(2)}$$

$$\cos\ \beta = \frac{AF}{AC} \rightarrow AF = AC\cos\beta \qquad \text{..............(3)}$$

Pada segitiga siku–siku AEF,

$$\cos\ \alpha = \frac{AE}{AF} \rightarrow AE = AF\cos\ \alpha \qquad \text{..............(4)}$$

Dari (1) dan (2) diperoleh

GF = AC sin α sin β

Karena DE = GF maka DE = AC sin α sin β

Dari (3) dan (4) diperoleh

AE = AC cos α cos β

Sehingga AD = AE − DE

AC cos (α + β) = AC cos α cos β − AC sin α sin β

cos (α + β) = cos α cos β − sin α sin β

Jadi untuk menentukan cos (α − β) gantilah β dengan −β lalu disubstitusikan ke rumus cos (α + β).

cos (α − β) = cos (α + (−β))

= cos α cos (−β) − sin α sin (−β)

$= \cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha\,(-\sin\beta)$

$= \cos\alpha \cos\beta + \sin\alpha \sin\beta$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cos\beta + \sin\alpha \sin\beta$$

2. Rumus Jumlah dan Selisih sin ($\alpha + \beta$) dan sin ($\alpha - \beta$)

Untuk menentukan rumus sin ($\alpha + \beta$) dan sin ($\alpha - \beta$) perlu diingat rumus sebelumnya, yaitu: $\sin(90° - \alpha) = \cos\alpha$ dan $\cos(90° - \alpha) = \sin\alpha$

$\sin(\alpha + \beta) = \cos(90° - (\alpha + \beta))$

$= \cos((90° - \alpha) - \beta)$

$= \cos(90° - \alpha)\cos\beta + \sin(90° - \alpha)\sin\beta$

$= \sin\alpha \cos\beta + \cos\alpha \sin\beta$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cos\beta + \cos\alpha \sin\beta$$

Untuk menentukan sin ($\alpha - \beta$), seperti rumus kosinus selisih dua sudut gantilah β dengan $-\beta$ lalu disubstitusikan ke sin ($\alpha + \beta$).

$\sin(\alpha - \beta) = \sin(\alpha + (-\beta))$

$= \sin\alpha \cos(-\beta) + \cos\alpha \sin(-\beta)$

$= \sin\alpha \cos\beta + \cos\alpha\,(-\sin\beta)$

$= \sin\alpha \cos\beta - \cos\alpha \sin\beta$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha \cos\beta - \cos\alpha \sin\beta$$

3. Rumus Jumlah dan Selisih tan ($\alpha + \beta$) dan tan ($\alpha - \beta$)

Dengan mengingat $\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, maka

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)} = \frac{\sin\alpha \cos\beta + \cos\alpha \sin\beta}{\cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta}$$

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\dfrac{\sin\alpha \cos\beta + \cos\alpha \sin\beta}{\cos\alpha \cos\beta}}{\dfrac{\cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta}{\cos\alpha \cos\beta}} = \frac{\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \dfrac{\sin\beta}{\cos\beta}}{1 - \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \cdot \dfrac{\sin\beta}{\cos\beta}}$$

$$= \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha \tan\beta}$$

Jadi

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha \tan\beta}$$

Untuk menentukan tan ($\alpha - \beta$), gantilah β dengan $-\beta$ lalu disubstitusikan ke tan ($\alpha + \beta$).

tan ($\alpha - \beta$) = tan (α + ($-\beta$))

$$= \frac{\tan\alpha + \tan(-\beta)}{1 - \tan\alpha\tan(-\beta)}$$

$$= \frac{\tan\alpha - \tan(\beta)}{1 - \tan\alpha(-\tan\beta)}$$

$$= \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha\tan\beta}$$

Jadi

$$\boxed{\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha\tan\beta}}$$

4. Rumus Trigonometri Sudut Ganda

Dari rumus–rumus trigonometri untuk jumlah dua sudut, dapat dikembangkan menjadi rumus trigonometri untuk sudut rangkap.

a. $\sin 2\alpha = \sin(\alpha + \alpha) = \sin\alpha\cos\alpha + \cos\alpha\sin\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$

$$\boxed{\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha}$$

b. $\cos 2\alpha = \cos(\alpha + \alpha) = \cos\alpha\cos\alpha - \sin\alpha\sin\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$

$$\boxed{\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha}$$

Rumus–rumus variasi bentuk lain yang memuat $\cos 2\alpha$ dapat diturunkan dengan mengingat rumus dasar $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$.

$$\begin{aligned}\cos 2\alpha &= \cos^2\alpha - \sin^2\alpha \\ &= \cos^2\alpha - (1 - \cos^2\alpha) \\ &= 2\cos^2\alpha - 1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos 2\alpha &= \cos^2\alpha - \sin^2\alpha \\ &= (1 - \sin^2\alpha) - \sin^2\alpha \\ &= 1 - 2\sin^2\alpha\end{aligned}$$

Sehingga

1) $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$
2) $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$
3) $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$

c. $$\tan 2\alpha = \tan(\alpha+\alpha) = \frac{\tan\alpha + \tan\alpha}{1-\tan\alpha\tan\alpha} = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$$

$$\boxed{\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}}$$

5. Rumus sin, cos, d... an

Jika α sudut, maka:

a. $\sin\frac{1}{2}\alpha = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$, dengan tanda (+) untuk $\frac{1}{2}\alpha$ di kuadran I atau II dan tanda (-) untuk $\frac{1}{2}\alpha$ di kuadran III atau IV

Bukti:

$\cos 2A = 1 - 2sin^2A$

$sin^2A = \frac{1-cos2A}{2}$ .... (1)

Jika A = $\frac{1}{2}\alpha$, maka (1) menjadi:

$sin^2\frac{1}{2}\alpha = \frac{1-cos2(\frac{1}{2}\alpha)}{2} = \frac{1-cos\alpha}{2}$

$sin\frac{1}{2}\alpha = \pm\sqrt{\frac{1-cos\alpha}{2}}$ terbukti

b. $\cos\frac{1}{2}\alpha = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$, dengan tanda (+) untuk $\frac{1}{2}\alpha$ di kuadran I atau IV dan tanda (-) untuk $\frac{1}{2}\alpha$ di kuadran II atau III

Bukti:

$\cos 2A = 2cos^2A - 1$

$cos^2A = \frac{1+cos2A}{2}$ .... (2)

Jika A = $\frac{1}{2}\alpha$, maka (2) menjadi:

$cos^2\frac{1}{2}\alpha = \frac{1+cos2(\frac{1}{2}\alpha)}{2} = \frac{1+cos\alpha}{2}$

$cos\frac{1}{2}\alpha = \pm\sqrt{\frac{1+cos\alpha}{2}}$ terbukti

c. $\tan\frac{1}{2}\alpha = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$, dengan tanda (+) untuk $\frac{1}{2}\alpha$ di kuadran I atau III dan tanda (-) untuk $\frac{1}{2}\alpha$ di kuadran II atau IV

Bukti:

Telah diketahui sebelumnya pada pembuktian (a) dan (b) bahwa:

$sin\frac{1}{2}\alpha = \pm\sqrt{\frac{1-cos\alpha}{2}}$ dan $cos\frac{1}{2}\alpha = \pm\sqrt{\frac{1+cos\alpha}{2}}$, maka:

$tan\frac{1}{2}\alpha = \frac{sin\frac{1}{2}\alpha}{cos\frac{1}{2}\alpha} = \frac{\pm\sqrt{\frac{1-cos\alpha}{2}}}{\pm\sqrt{\frac{1+cos\alpha}{2}}} = \sqrt{\frac{1-cos\alpha}{1+cos\alpha}}$ terbukti

d. $\tan\frac{1}{2}\alpha = \frac{sin\alpha}{1+\cos\alpha} = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$

Bukti:

1. Telah diperoleh bahwa $tan\frac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{1-cos\alpha}{1+cos\alpha}}$, maka:

$$tan\frac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{1-cos\alpha}{1+cos\alpha}} = \sqrt{\frac{1-cos\alpha}{1+cos\alpha} \times \frac{1+cos\alpha}{1+cos\alpha}} = \sqrt{\frac{1-cos^2\alpha}{(1+\cos\alpha)^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{sin^2\alpha}{(1+cos\alpha)^2}} = \frac{sin\alpha}{1+cos\alpha}$$

2. Telah diperoleh bahwa $tan\frac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{1-cos\alpha}{1+cos\alpha}}$, maka:

$$tan\frac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{1-cos\alpha}{1+cos\alpha}} = \sqrt{\frac{1-cos\alpha}{1+cos\alpha} \times \frac{1-cos\alpha}{1-cos\alpha}} = \sqrt{\frac{(1-\cos\alpha)^2}{1-cos^2\alpha}}$$

$$= \sqrt{\frac{(1-\cos\alpha)^2}{sin^2\alpha}} = \frac{1-cos\alpha}{sin\alpha}$$

Selain dengan teorema sudut pertengahan, seringkali teorema sudut ganda digunakan dalam menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan sudut pertengahan.

1. $sin\alpha = 2sin\frac{1}{2}\alpha cos\frac{1}{2}\alpha$
2. a. $cos\alpha = cos^2\frac{1}{2}\alpha - sin^2\frac{1}{2}\alpha$
   b. $cos\alpha = 2cos^2\frac{1}{2}\alpha - 1$
   c. $cos\alpha = 1 - 2sin^2\frac{1}{2}\alpha$
3. $tan\alpha = \frac{2tan\frac{1}{2}\alpha}{1-tan^2\frac{1}{2}\alpha}$
4. $sin\alpha = \frac{2tan\frac{1}{2}\alpha}{1+tan^2\frac{1}{2}\alpha}$
5. $cos\alpha = \frac{1-tan^2\frac{1}{2}\alpha}{1+tan^2\frac{1}{2}\alpha}$

7. Mengubah Rumus Perkalian ke rumus Penjumlahan/Pengurangan

a. Dari rumus cosinus untuk jumlah dan selisih 2 sudut diperoleh:

$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$

$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$

―――――――――――――――――――――――― +

$\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) = 2\cos\alpha\cos\beta$

$\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) = 2\cos\alpha\cos\beta$

$$\begin{array}{ll} \cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta & \\ \cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta & \\ \hline \cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta) = -2\sin\alpha\sin\beta & - \end{array}$$

$\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta) = -2\sin\alpha\sin\beta$

b. Dari rumus sinus untuk jumlah dan selisih 2 sudut diperoleh:

$$\begin{array}{ll} \sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta & \\ \sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta & \\ \hline \sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) = 2\sin\alpha\cos\beta & + \end{array}$$

$\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) = 2\sin\alpha\cos\beta$

$$\begin{array}{ll} \sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta & \\ \sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta & \\ \hline \sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) = 2\sin\alpha\cos\beta & - \end{array}$$

$\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta) = 2\cos\alpha\sin\beta$

c. Rumus Penjumlahan dan Pengurangan sin dan cos

Jika α dan β adalah sudut-sudut sembarang, maka:

1. $sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{1}{2}(\alpha + \beta)\cos\frac{1}{2}(\alpha - \beta)$
2. $sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{1}{2}(\alpha + \beta)\sin\frac{1}{2}(\alpha - \beta)$
3. $\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{1}{2}(\alpha + \beta)\cos\frac{1}{2}(\alpha - \beta)$
4. $\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{1}{2}(\alpha + \beta)\sin\frac{1}{2}(\alpha - \beta)$

LATIHAN

1. Jabarkanlah!
   a. Sin (x + 5y)
   b. Cos (x + 30^o)
   c. Tan $(\frac{\pi}{2} + y)$

2. Buktikan bahwa:
   a. Sin $(\frac{\pi}{2} + y)$= cos x
   b. Cos $(90 + x)^{0}$ = -sin x^{0}
   c. Tan $(180 + x)^{0}$ = tan x
3. Jabarkanlah:
   a. Sin (x - 3y)
   b. Cos (3a – 4b)
   c. Tan (3p – q)
4. Buktikan bahwa:
   a. Sin (x – 45^{0}) = $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (sin x – cos x)
   b. Cos $(\frac{3\pi}{2} - x)$ = -sin x
   c. Tan$(2\pi - x)$= -tan x
5. Hitunglah:
   a. $\sin\frac{5\pi}{9} cos\frac{\pi}{18} - cos\frac{5\pi}{9} sin\frac{\pi}{18}$
   b. $\cos\frac{\pi}{3} cos\frac{\pi}{12} + sin\frac{\pi}{3} sin\frac{\pi}{12}$
   c. $\frac{tan\frac{7\pi}{9} - tan\frac{\pi}{9}}{1+an\frac{7\pi}{9} tan\frac{\pi}{9}}$
6. sin 105^{0} =
7. sin 172^{o} cos 37^{0} – cos 172^{0} sin37^{0} =
8. sin $(62+28)^{0}$ =
9. Nyatakan bentuk cos $(x - 53)^{0}$ ke dalam bentuk yang paling sederhana!
10. Sin A = $\frac{3}{5}$ dan A sudut lancip, maka tentukanlah sin 2A dan cos 3A!
11. Tentukan sin 2α jika sin α + cos α = b
12. Selesaikanlah bentuk perkalian sinus dan cosinus di bawah ini:
    a. 2 sin 45^{0} cos 8^{0}
    b. 2 cos (π – A) sin (π + A)

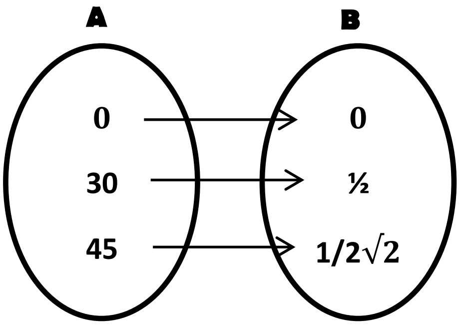
F. Grafik fungsi trigonometri

Fungsi trigonometri merupakan suatu fungsi yang melibatkan bentuk trigonometri, misalkan fungsi sinus, cosinus, tangen, secan, cosecant dan cotangent. **Grafik fungsi trigonometri**, artinya penekanan ada pada grafiknya. Selain grafik, ada nilai maksimum atau minimum suatu fungsi trigonometri dengan memanfaatkan bentuk grafik fungsi trigonometri masing-masing dan rumus-rumus dasar yang ada pada trigonometri.

1. Fungsi Sinus, Cosinus dan Tangen

a) Fungsi Sinus

Perhatikan gambar berikut:



Gambar 23. Himpunan A ke B

Gambar 23. menunjukkan suatu fungsi karena jika x = 0 maka sin 0 = 0, jika x = 30 maka sin 30 = ½, dan jika x = 45 maka sin 45 = 1/2$\sqrt{2}$. Apakah Oleh karena itu, fungsi yang memetakan himpunan sudut $x°$ ke himpunan bilangan real $\sin x°$ disebut fungsi sinus. fungsi sinus dapat dilambangkan dengan $f: x° \to \sin x°$ (f *memetakan* $x°$ *ke sinus* $x°$). Jadi, rumus untuk fungsi sinus adalah $f(x°) = \sin x°$ atau $f(x) = \sin x$ untuk x dalam ukuran radian.

Jika $y = f(x) = 1 - \sin^2 x$ maka hitunglah nilai fungsi trigonometri, jika diketahui x seperti berikut ini!

No.	x	$y = f(x) = 1 - \sin^2 x$
1.	$\pi/3$	$y = f\left(\frac{\pi}{3}\right) = 1 - \sin^2\left(\frac{\pi}{3}\right)$ $= 1 - \sin^2(60°)$ $= 1 - \cdots$ $= \cdots$
2.	$\pi/4$	$y = f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 - \sin^2\left(\frac{\pi}{4}\right)$ $= \cdots - \cdots$ $= \cdots - \cdots$ $= \cdots$
3.	$2\pi/3$	$y = f\left(\frac{2\pi}{3}\right) = 1 - \sin^2\left(\frac{2\pi}{3}\right)$ $= \cdots - \cdots$ $= \cdots - \cdots$ $= \cdots$
4.	$\pi/2$	$y = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 - \sin^2\left(\frac{\pi}{2}\right)$ $= \cdots - \cdots$ $= \cdots - \cdots$ $= \cdots$
5.	π	$y = f(\pi) = 1 - \sin^2(\pi)$

		$= \cdots - \cdots$ $= \cdots - \cdots$ $= \cdots$

Setelah mengerjakan soal tersebut coba periksalah persoalan berikut apakah sudah sesuai dengan konsep yang dipelajari.

Contoh 1

Jika diketahui fungsi $f(x) = 1 - 2\sin^2 x$ dengan $x = \frac{\pi}{6}$ maka nilai $f(x)$ adalah...

Penyelesaiannya:

Penyelesaian 1

$$f\left(\frac{\pi}{6}\right) = 1 - 2\sin^2\left(\frac{\pi}{6}\right)$$
$$= 1 - 2\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)^2$$
$$= 1 - 2\sin\left(\frac{\pi^2}{36}\right)$$
$$= 1 - 2\sin\left(\frac{32400°}{36}\right)$$
$$= 1 - 2\sin(900°)$$
$$= 1 - 2(0) = 1$$

Jadi, $f\left(\frac{\pi}{6}\right) = 1$

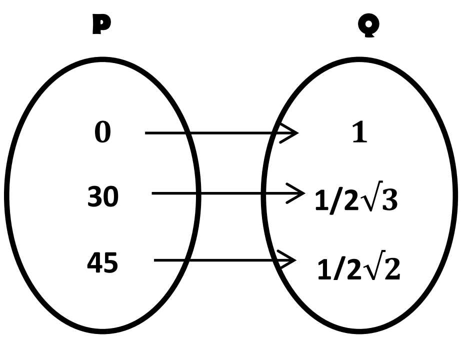
Penyelesaian 2

$$f\left(\frac{\pi}{6}\right) = 1 - 2\sin^2\left(\frac{\pi}{6}\right)$$
$$= 1 - 2\sin^2(30°)$$
$$= 1 - 2(1/2)^2$$
$$= 1 - 2(1/4)$$
$$= 1 - (1/2)$$
$$= 1/2$$

Jadi, $f\left(\frac{\pi}{6}\right) = 1/2$

Periksalah kebenaran hasil penyelesaian 1 & 2 dari contoh 1 yang diperlihatkan, kemudian tunjukkan kekeliruan yang terlihat dari penyelesaian yang salah.

b) Fungsi Cosinus



Gambar 24. Himpunan P ke Q

Gambar 24. menunjukkan suatu fungsi karena jika x = 0 maka cos 0 = 1, jika x = 30 maka cos 30 = ½$\sqrt{3}$, dan jika x = 45 maka cos 45 = 1/2$\sqrt{2}$. Oleh karena itu, fungsi yang memetakan himpunan sudut $x°$ ke himpunan bilangan real $\cos x°$ disebut fungsi cosinus. fungsi cosinus dapat dilambangkan dengan $f: x° \to \cos x°$ (f *memetakan* $x°$ *ke cosinus* $x°$). Jadi, rumus untuk fungsi cosinus adalah $f(x°) = \cos x°$ atau $f(x) = \cos x$ untuk x dalam ukuran radian.

Jika $y = f(x) = \frac{1+\sin x}{\cos^2 x}$ maka hitunglah nilai fungsi trigonometri, jika diketahui x seperti berikut ini!

No.	x	$y = f(x) = \dfrac{1 + \sin x}{\cos^2 x}$
1.	$\pi/3$	$y = f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1+\sin(\pi/3)}{\cos^2(\pi/3)}$ $= \frac{1+\cdots}{\cdots}$ $= \frac{\cdots}{\cdots}$ $= \cdots$
2.	$\pi/4$	$y = f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1+\sin(\pi/4)}{\cos^2(\pi/4)}$ $= \frac{1+\cdots}{\cdots}$ $= \frac{\cdots}{\cdots}$ $= \cdots$
3.	$\pi/6$	$y = f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1+\sin(\pi/6)}{\cos^2(\pi/6)}$ $= \frac{1+\cdots}{\cdots}$ $= \frac{\cdots}{\cdots}$ $= \cdots$
4.	$\pi/2$	$y = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1+\sin(\pi/2)}{\cos^2(\pi/2)}$ $= \frac{1+\cdots}{\cdots}$ $= \frac{\cdots}{\cdots}$ $= \cdots$
5.	π	$y = f(\pi) = \frac{1+\sin(\pi)}{\cos^2(\pi)}$ $= \frac{1+\cdots}{\cdots}$ $= \frac{\cdots}{\cdots}$ $= \cdots$

Setelah mengerjakan soal tersebut coba periksalah persoalan berikut apakah sudah sesuai dengan konsep yang dipelajari.

Contoh 2

Jika diketahui fungsi $f(x) = 2\cos^2 x$ **dengan** $x = \frac{\pi}{6}$ **maka nilai** $f(x)$ **adalah...**

Penyelesaiannya:

Penyelesaian 1

$$f\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2\cos^2\left(\frac{\pi}{6}\right)$$
$$= 2\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)^2$$
$$= 2\cos\left(\frac{\pi^2}{36}\right)$$
$$= 2\cos\left(\frac{32400°}{36}\right)$$
$$= 2\cos\ (900°)$$
$$= 2(-1) = -2$$

Jadi, $f\left(\frac{\pi}{6}\right) = -2$

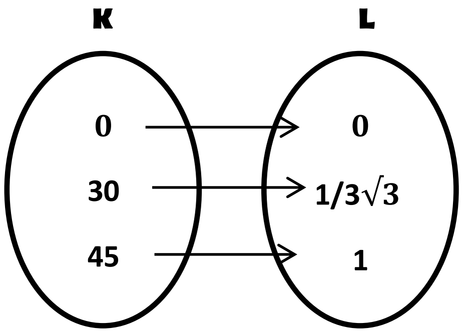
Penyelesaian 2

$$f\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2\cos^2\left(\frac{\pi}{6}\right)$$
$$= 2\cos^2(30°)$$
$$= 1 - 2(1/2\sqrt{3})^2$$
$$= 1 - 2(1/12)$$
$$= 1 - (2/12)$$
$$= 10/12$$

Jadi, $f\left(\frac{\pi}{6}\right) = 5/6$

Periksalah kebenaran hasil penyelesaian 1 & 2 dari contoh 1 yang diperlihatkan, kemudian tunjukkan kekeliruan yang terlihat dari penyelesaian yang salah.

c) Fungsi Tangen



Gambar 25. Himpunan K ke L

Gambar 25. menunjukkan suatu fungsi karena jika x = 0 maka tan 0 = 0, jika x = 30 maka tan 30 = 1/3$\sqrt{3}$, dan jika x = 45 maka tan 45 = 1. Oleh karena itu, fungsi yang memetakan himpunan sudut $x°$ ke himpunan bilangan real $\tan x°$ disebut fungsi tangen. fungsi sinus dapat dilambangkan dengan $f: x° \to \tan x°$ ($f\ memetakan\ x°\ ke\ tangen\ x°$). Jadi, rumus untuk fungsi tangen adalah $f(x°) = \tan x°$ atau $f(x) = \tan x$ untuk x dalam ukuran radian.

Jika $y = f(x) = \tan x + 1$ maka hitunglah nilai fungsi trigonometri, jika diketahui x seperti berikut ini!

No.	x	$y = f(x) = \tan x + 1$
1.	$\pi/3$	$y = f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \tan\left(\frac{\pi}{3}\right) + 1$ $= \cdots + 1$ $= \cdots$
2.	$\pi/4$	$y = f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \tan\left(\frac{\pi}{3}\right) + 1$ $= \cdots + 1$ $= \cdots$
3.	$\pi/6$	$y = f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \tan\left(\frac{\pi}{3}\right) + 1$ $= \cdots + 1$ $= \cdots$
4.	$\pi/2$	$y = f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \tan\left(\frac{\pi}{3}\right) + 1$ $= \cdots + 1$ $= \cdots$
5.	π	$y = f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \tan\left(\frac{\pi}{3}\right) + 1$ $= \cdots + 1$ $= \cdots$

Setelah mengerjakan soal tersebut coba periksalah persoalan berikut apakah sudah sesuai dengan konsep yang dipelajari.

Contoh 3

Jika diketahui fungsi $f(x) = 1 - 2\tan x$ dengan $x = \frac{\pi}{6}$ maka nilai $f(x)$ adalah...

Penyelesaiannya:

Penyelesaian 1

$$f\left(\frac{\pi}{6}\right) = 1 - 2\tan\left(\frac{\pi}{6}\right)$$
$$= 1 - \tan\left(\frac{2\pi}{6}\right)$$
$$= 1 - \tan(60°)$$
$$= 1 - (\sqrt{3})$$
$$= 1 - (1{,}7321)$$
$$= -0{,}7321$$

Jadi, $f\left(\frac{\pi}{6}\right) = -0{,}7321$

Penyelesaian 2

$$f\left(\frac{\pi}{6}\right) = 1 - 2\tan\left(\frac{\pi}{6}\right)$$
$$= 1 - 2\tan(30°)$$
$$= 1 - 2(\sqrt{3})$$
$$= 1 - (3{,}4641)$$
$$= -2{,}4641$$

Jadi, $f\left(\frac{\pi}{6}\right) = -2{,}4641$

Periksalah kebenaran hasil penyelesaian 1 & 2 dari contoh 1 yang diperlihatkan, kemudian tunjukkan kekeliruan yang terlihat dari penyelesaian yang salah.

LATIHAN

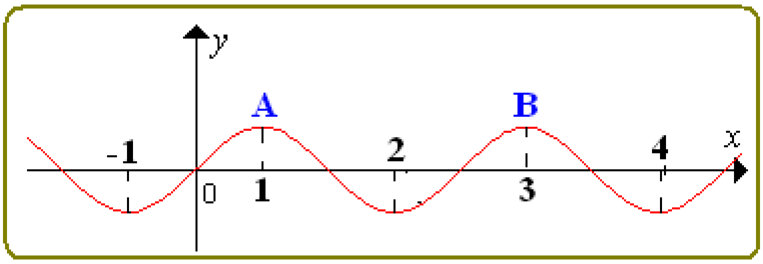
Kerjakanlah soal-soal berikut dengan benar dan tepat!

1. Diketahui sebuah fungsi $f(x) = \frac{\sin^2 x + \tan 2x}{\cos x}$, maka tentukan nilai fungsi:
   a. $f(180°)$
   b. $f(225°)$
   c. $2f(135°)$
2. Jika bentuk fungsi $f(x) = a\ \sin^2 x + b \sin x + c$ dan titik yang dilalui $(\sin x, f(x))$ yakni (3, 2), (1, 0) dan (-1, -2), maka tentukan nilai a, b, dan c sebagai koefisien dari variabel fungsi tersebut.

2. Grafik fungsi trigonometri

a) Fungsi periodic

Fungsi periodik adalah suatu fungsi yang grafiknya berulang secara terus-menerus dalam setiap periode tertentu. Suatu fungsi $f(x)$ disebut fungsi periodic dengan periode p, jika memenuhi $f(x+p) = f(x)$. Perhatikan Gambar 26. berikut ini:



Gambar 26. Grafik Fungsi *f*(*x*)

a) Apakah fungsi *f*(*x*) merupakan fungsi periodik?

b) Jika *f*(*x*) merupakan fungsi periodik, tentukan periodenya?

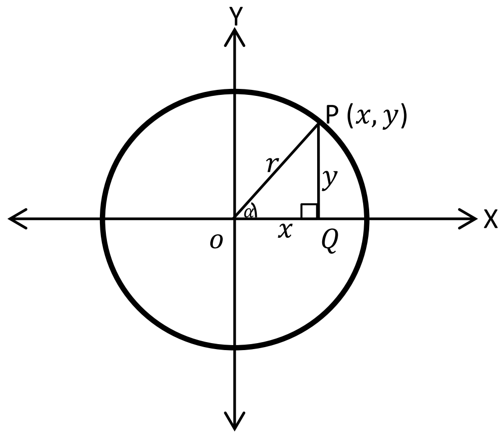
Penyelesaian:

a) Pada Gambar 6.4, terlihat jelas bahwa fungsi *f*(*x*) adalah fungsi periodik karena grafiknya selalu berulang

b) Perhatikan titik puncak A dan B, dimana titik puncak B adalah pengulangan kembali titik puncak A, ini artinya fungsi *f*(*x*) mengalami pengulangan setiap jaraknya sama dengan dari titik A ke titik B. Dimana jarak titik A dan B adalah 2, sehingga periode fungsi tersebut adalah 2, atau memenuhi $f(x + 2) = f(x)$.

Fungsi trigonometri merupakan fungsi periodik. Grafik baku trigonometri merupakan grafik sederhana yang terdiri fungsi trigonometri.

(1). *Periode Fungsi Trigonometri (Sinus dan Kosinus)*



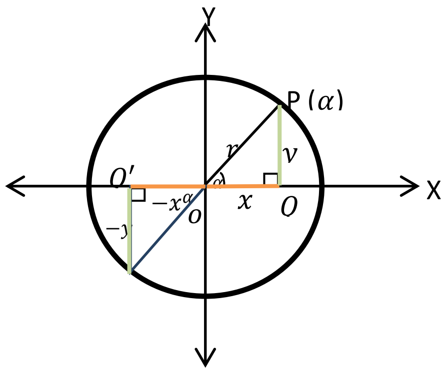
Gambar 27.

Penambahan panjang busur α dengan kelipatan 2π (satuan putaran penuh) akan diperoleh titik $p(\alpha)$ yang sama, sehingga secara umum berlaku:

(a). $\sin(\alpha + k \times 2\pi) = \sin\alpha$, dengan $k \in \boldsymbol{B}$ atau $\sin(\alpha° + k \times 360°) = \sin\alpha°$, dengan $k \in \boldsymbol{B}$.

(b). $\cos\,(\alpha + k \times 2\pi) = \cos\ \alpha$, dengan $k \in \boldsymbol{B}$ atau $\cos\,(\alpha° + k \times 360°) = \cos\ \alpha°$, dengan $k \in \boldsymbol{B}$.

(2). *Periode Fungsi Trigonometri (Tangen)*



Gambar 28.

Penambahan panjang busur α dengan kelipatan π (setengah putaran) akan diperoleh $p(\alpha + k \times p)$ yang nilai tangennya sama untuk kedua sudut tersebut, sehingga secara umum berlaku: $\tan\ (a + k \times \pi) = \tan a°$, dengan $k \in \boldsymbol{B}$ atau $\tan(a + k \times 180°) = \tan a°$, dengan $k \in \boldsymbol{B}$.

(3) Amplitudo Fungsi Trigonometri

Jika $y = f(x)$ adalah fungsi periodic, dengan nilai maksimum $= y_{maks}$ dan nilai minimum $= y_{min}$, maka amplitude fungsi $y = f(x)$ adalah:

$$Amplitudo = \frac{1}{2}(y_{maks} - y_{min})$$

Berikut contoh soal tentang periode dan amplitude:

1. Diketahui tegangan V (volt) dari penyuplai tenaga (*power supply*) arus bolak-balik (AC), yang ditentukan oleh $V = 240 \sin 120\ \pi t$. Berapakah periode dan amplitude dari osilasinya?

Penyelesaiannya:

Periode fungsi sinus adalah 2π, maka $120\pi t = 2\pi$

$$t = \frac{1}{60}$$

Amplitudo $= \frac{1}{2}(V_{maks} - V_{min}) = \frac{1}{2}\big(240 - (-240)\big) = \frac{1}{2}(480) = 240$

Jadi, periode dan amplitude osilasinya adalah $\frac{1}{60}$ dan 240.

Pada contoh diatas menerapkan ketentuan periode fungsi sinus yakni 2π dengan ketantuan rumus amplitude $\frac{1}{2}(V_{maks} - V_{min})$. Sekarang perhatikan contoh selanjutnya, yakni:

2. Diketahui petugas PLN sedang memeriksa tegangan tinggi suatu instalasi listrik didaerah tertentu dengan V (volt) $= 300 \tan 200\pi t$ dan $V_{min} = -100\ volt$. Berapakah periode dan amplitude dari instalasi listrik tersebut?

Penyelesaiannya:

Periode fungsi tangen adalah 2π, maka $200\pi t = 2\pi$

$$t = \frac{1}{100}$$

Amplitudo $= \frac{1}{2}(V_{maks} - V_{min}) = \frac{1}{2}\big(300 - (-100)\big) = \frac{1}{2}(400) = 200$

Jadi, periode dan amplitude osilasinya adalah $\frac{1}{100}$ dan 200.

Periksalah kebenaran soal ke-2, apakah sudah sesuai dengan ketentuan !!!!

Jika belum, maka tuliskan kembali jawaban yang benar pada kotak berikut ini:

LATIHAN

1. Populasi suatu binatang pada suatu pulau dihitung tiap tanggal 1 pada tiap bulan ditentukan oleh $P = 600 + 50\cos(\frac{\pi t}{3})$ dengan P adalah populasi dan t adalah bulan (t = 0 adalah tanggal 1 Januari). Berapa banyak binatang laut pada tanggal 1 Juni dan 1 oktober.
2. Diberikan fungsi trigonometri $y = 10\sin x - 4$. Tentukan nilai maksimum, nilai minimum, dan amplitudo fungsi tersebut.

b) Menggambar grafik fungsi trigonometri dengan menggunakan tabel

untuk menggambar grafik menggunakan tabel, haruslah mengetahui sudut-sudut istimewa yang dihubungkan dengan nilai fungsi Trigonometri berikut:

Tabel 6.1 Nilai Fungsi Trigonometri untuk Sudut-sudut Istimewa

Sudut (x)	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$
Fungsi (y)	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
Sin x	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1
Cos x	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0
Tan x	0	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	*TD*
Cot x	*TD*	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	0
Sec x	1	$\frac{2}{3}\sqrt{3}$	$\sqrt{2}$	2	*TD*
Csc x	*TD*	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2}{3}\sqrt{3}$	1

Dari tabel diatas dapat digambarkan grafik fungsinya berdasarkan nilai-nilai yang dihasilkan pada tabel dengan melengkapi ketentuan titik-titik koordinat di bawah ini:

a. Grafik fungsi sinus

$f(x) = \sin x$, sehingga memiliki titik koordinat sebagai berikut:

$x = x°$	0°	30°	45°	60°	90°	135°	180°	225°	270°	315°	360°
$y = \sin x°$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1	....	....	....	....	....	....
(x, y)	$(0,0)$	$(30, \frac{1}{2})$	$(45, \frac{1}{2}\sqrt{2})$	$(60, \frac{1}{2}\sqrt{3})$	$(90, 1)$	....	....	....	....	....	....

b. Grafik fungsi cosinus

$f(x) = \cos x$, sehingga memiliki titik koordinat sebagai berikut:

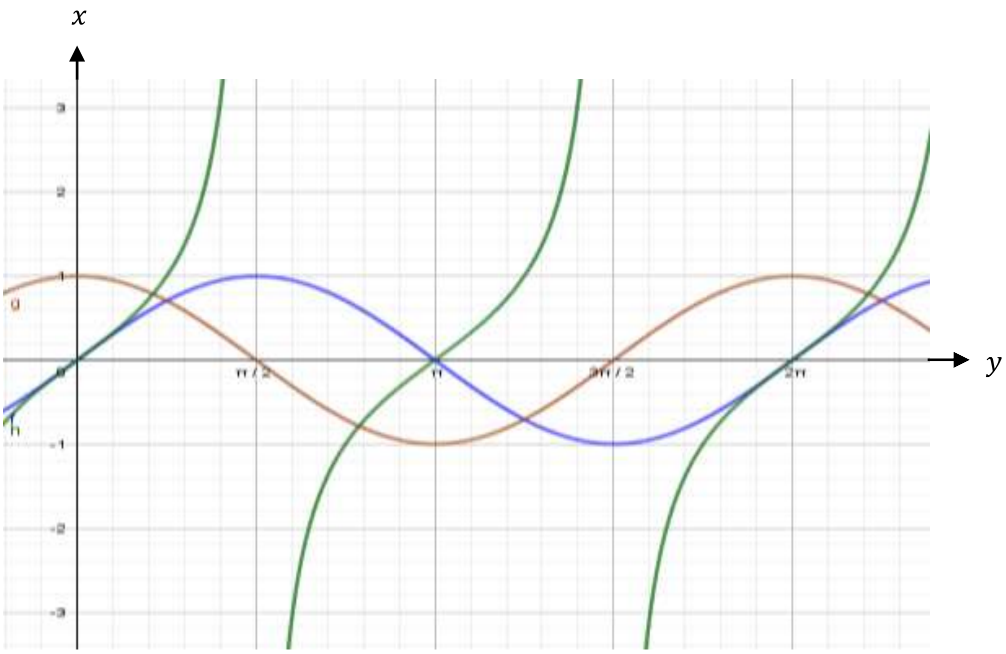
$x = x°$	0°	30°	45°	60°	90°	135°	180°	225°	270°	315°	360°
$y = \cos x°$	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0	....	....	....	....	....	....
(x, y)	$(0,1)$	$(30, \frac{1}{2}\sqrt{3})$	$(45, \frac{1}{2}\sqrt{2})$	$(60, \frac{1}{2})$	$(90, 0)$	....	....	....	....	....	....

c. Grafik fungsi tangen

$f(x) = \tan x$, sehingga memiliki titik koordinat sebagai berikut:

$x = x°$	0°	30°	45°	60°	90°	135°	180°	225°	270°	315°	360°
$y = \tan x°$	0	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	*TD*	....	....	....	....	....	....
(x, y)	$(0,0)$	$(30, \frac{1}{3}\sqrt{3})$	$(45, 1)$	$(60, \sqrt{3})$	$(90, \sim)$	....	....	....	....	....	....

Setelah lengkap titik-titik koordinatnya, maka periksalah gambar grafik fungsi sinus, cosinus dan tangen tersebut pada grafik di bawah ini:



Gambar 29. Grafik fungsi sinus (biru), grafik cosinus (merah), dan grafik tangen (hijau)

Selanjutnya selain sinus, cosinus dan tangen, ada cotangent, secan dan cosecant yang dapat dituliskan titik-titik koordinatnya sebagai berikut, serta lengkapilah bagian yang masih kosong:

d. Grafik fungsi cotangen

$f(x) = \cot x$, sehingga memiliki titik koordinat sebagai berikut:

$x = x°$	0°	30°	45°	60°	90°	135°	180°	225°	270°	315°	360°
$y = \cot x°$	*TD*	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	0	....	....	....	....	....	....
(x, y)	$(0, \sim)$	$(30, \sqrt{3})$	$(45, 1)$	$(60, \frac{1}{3}\sqrt{3})$	$(90, 0)$	....	....	....	....	....	....

e. Grafik fungsi secan

$f(x) = \sec x$, sehingga memiliki titik koordinat sebagai berikut:

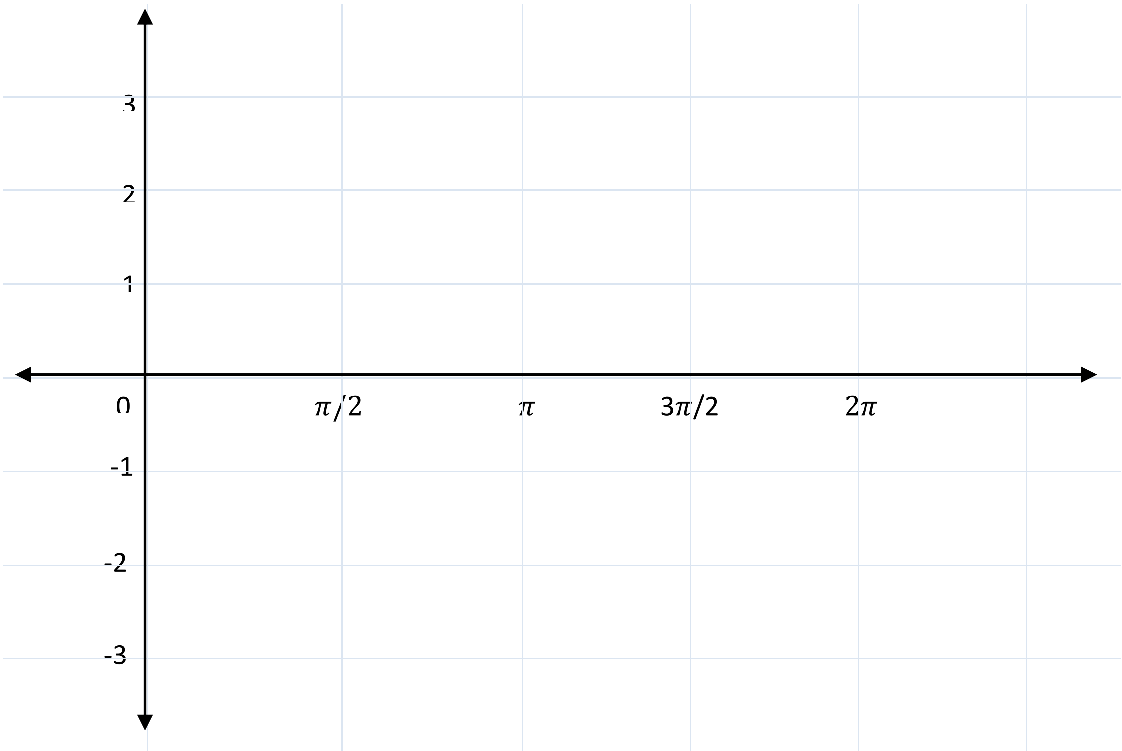
$x = x°$	0°	30°	45°	60°	90°	135°	180°	225°	270°	315°	360°
$y = \sec x°$	1	$\frac{2}{3}\sqrt{3}$	$\sqrt{2}$	2	*TD*	....	....	....	....	....	....
(x, y)	$(0,1)$	$(30, \frac{2}{3}\sqrt{3})$	$(45, \sqrt{2})$	$(60, 2)$	$(90, \sim)$	....	....	....	....	....	....

f. Grafik fungsi cosecan

$f(x) = \csc x$, sehingga memiliki titik koordinat sebagai berikut:

$x = x°$	0°	30°	45°	60°	90°	135°	180°	225°	270°	315°	360°
$y = \csc x°$	*TD*	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2}{3}\sqrt{3}$	1	....	....	....	....	....	....
(x, y)	$(0, \sim)$	$(30, 2)$	$(45, \sqrt{2})$	$(60, \frac{2}{3}\sqrt{3})$	$(90, 1)$	....	....	....	....	....	....

Untuk grafiknya dapat digambarkan pada bidang kartesius berikut:



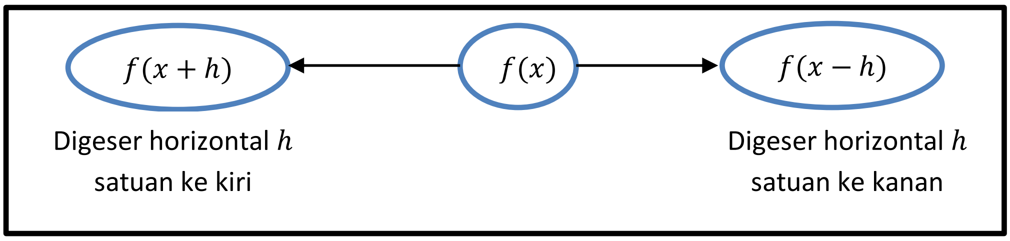
Gambar 30. Grafik cotangen, secan dan cosecan

Beberapa grafik fungsi trigonometri di atas merupakan grafik fungsi yang berdasarkan sudut-sudut istimewa, bagaimana jika fungsi sinus $f(x) = \sin x$ berubah menjadi $f(x) = \sin(x + 2)$ atau $f(x) = \sin x + 2$ atau $f(x) = \sin(x + 2) + 2$. Maka bagaimana gambar grafiknya ?

Untuk menjawab pertanyaan tersebut, simak penjelasan berikut:

c) Pergeseran pada grafik fungsi trigonometri baku

a) Pergeseran Horizontal



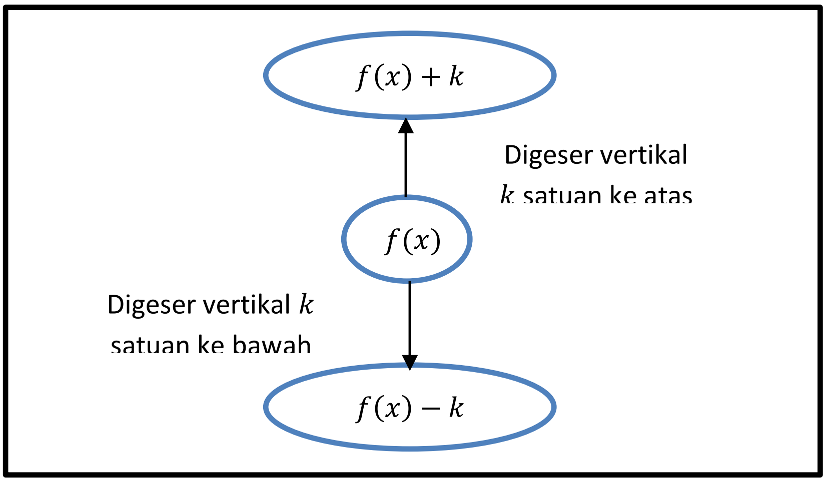
Gambar 31. Perubahan Pergeseran Fungsi secara Horizontal

Jika $h \in \boldsymbol{R}$, $h > 0$, dan $f(x)$ adalah fungsi trigonometri baku $f(x) = \sin x$, $f(x) = \cos x$, dan $f(x) = \tan x$ maka:

3. Grafik fungsi $f(x - h)$ diperoleh dari grafik fungsi $f(x)$ yang digeser horizontal sejauh h satuan ke kanan.
4. Grafik fungsi $f(x + h)$ diperoleh dari grafik fungsi $f(x)$ yang digeser horizontal sejauh h satuan ke kiri.

Pergeseran grafik fungsi $f(x)$ menjadi $f(x \pm h)$ atau sebaliknya dinamakan pergeseran horizontal, yaitu pergeseran yang searah dengan sumbu X.

b) Pergeseran Vertikal



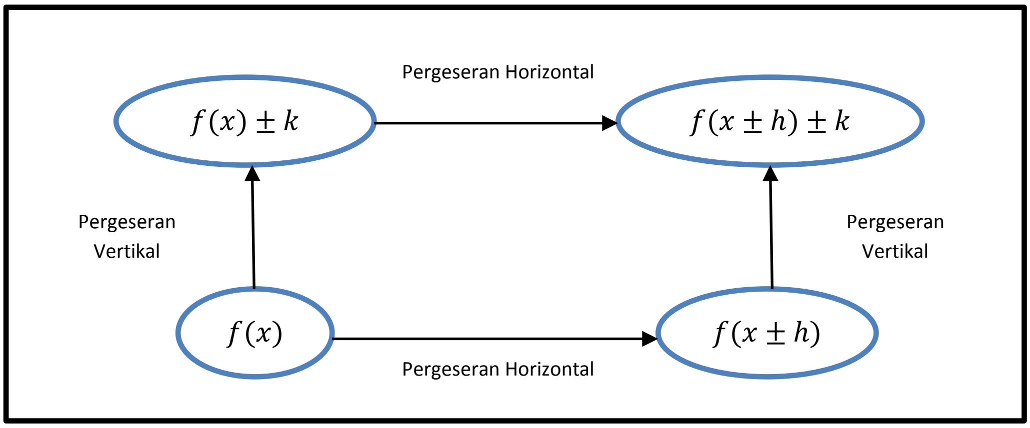
Gambar 32. Perubahan Pergeseran Fungsi secara Vertikal

Jika $k \in \boldsymbol{R}$, $k > 0$, dan $f(x)$ adalah fungsi trigonometri baku $f(x) = \sin x$, $f(x) = \cos x$, dan $f(x) = \tan x$ maka:

1. Grafik fungsi $f(x) + k$ diperoleh dari grafik fungsi $f(x)$ yang digeser vertikal sejauh k satuan ke atas.
2. Grafik fungsi $f(x) - k$ diperoleh dari grafik fungsi $f(x)$ yang digeser vertikal sejauh k satuan ke bawah.

Pergeseran grafik fungsi $f(x)$ menjadi $f(x) \pm k$ atau sebaliknya dinamakan pergeseran horizontal, yaitu pergeseran yang searah dengan sumbu Y.

c) Komposisi Dua Pergeseran Berurutan



Gambar 33. Pergeseran Fungsi secara Horizontal dan Vertikal

1. Jika grafik fungsi $f(x)$ digeser horizontal, maka diperoleh grafik fungsi $f(x \pm h)$, kemudian grafik fungsi $f(x \pm h)$ digeser vertikal, sehingga diperoleh grafik fungsi akhir $f(x \pm h) \pm k$.

2. Jika grafik fungsi $f(x)$ digeser vertikal, maka diperoleh grafik fungsi $f(x) \pm k$, selanjutnya grafik fungsi $f(x) \pm k$ digeser horizontal, sehingga diperoleh grafik fungsi akhir $f(x \pm h) \pm k$. Demikian, kedua pergeseran berurutan bersifat komutatif.

Perhatikan contoh soal berikut:

Tentukan digeser ke manakah setiap grafik fungsi ini:

1. $f(x) = \sin(x + \frac{\pi}{3})$

   Penyelesaiannya:

   Grafik fungsi $f(x) = \sin(x + \frac{\pi}{3})$ diperoleh dari grafik fungsi $f(x) = \sin x$ yang digeser secara horizontal ke kiri sejauh $\frac{\pi}{3}$.

2. $f(x) = \tan x + 2$

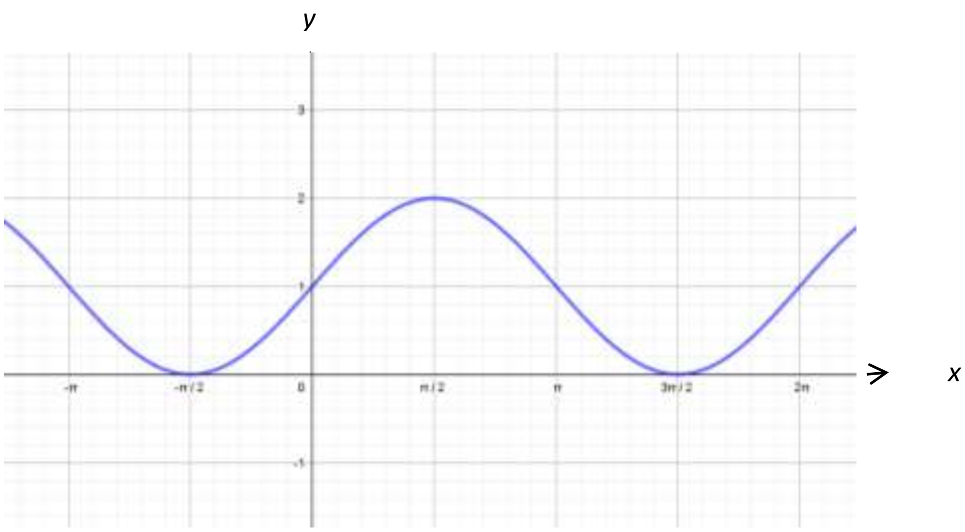
   Penyelesaiannya

   Grafik fungsi $f(x) = \tan x + 2$ diperoleh dari grafik fungsi $f(x) = \tan x$ yang digeser secara vertikal keatas sejauh 2 satuan.

3. Jika $f(x) = \tan\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - 3$ maka bagaimana penyelesainnya:

LATIHAN

1. Sketsakanlah grafik fungsi $f(x) = \cos x + 1$ dan $f(x) = \cos x - 1$ dalam interval $0 \le x \le 2\pi$.
2. Tentukan persamaan grafik fungsi sinus dibawah ini.



3. Digeser ke manakah setiap grafik fungsi berikut ini:
   a. $f(x) = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + 3$
   b. $f(x) = \tan\left(x + \frac{\pi}{3}\right) - \frac{1}{2}$

3. Nilai maksimum dan minimum fungsi sinus dan cosinus

Untuk setiap titik $P(x, y)$ pada fungsi trigonometri memiliki hubungan:

$-r \leq x \leq r$ dan $-r \leq y \leq r$

$-1 \leq \frac{x}{r} \leq 1$ dan $-1 \leq \frac{y}{r} \leq 1$

$-1 \leq \cos\alpha \leq 1$ dan $-1 \leq \sin\alpha \leq 1$

Berdasarkan uraian tersebut dapat dikemukakan bahwa:

4. Nilai maksimum dan minimum fungsi sinus
   a. Fungsi sinus $y = f(x) = \sin x$ memiliki nilai maksimum $y_{maks} = 1$ yang dicapai untuk $x = \frac{\pi}{2} + k \times 2\pi$, dengan $k \in \boldsymbol{B}$dan nilai minimum $y_{min} = -1$ yang dicapai untuk $x = \frac{3\pi}{2} + k \times 2\pi$, dengan $k \in \boldsymbol{B}$.
   b. Fungsi sinus $y = f(x) = \sin x°$ memiliki nilai maksimum $y_{maks} = 1$ yang dicapai untuk $x = 90° + k \times 360°$, dengan $k \in \boldsymbol{B}$dan nilai minimum $y_{min} = -1$ yang dicapai untuk $x = 270° + k \times 360°$, dengan $k \in \boldsymbol{B}$.
5. Nilai maksimum dan minimum fungsi kosinus
   a. Fungsi kosinus $y = f(x) = \cos x$ memiliki nilai maksimum $y_{maks} = 1$ yang dicapai untuk $x = k \times 2\pi$, dengan $k \in \boldsymbol{B}$dan nilai minimum $y_{min} = -1$ yang dicapai untuk $x = \pi + k \times 2\pi$, dengan $k \in \boldsymbol{B}$.
   b. Fungsi kosinus $y = f(x) = \cos x°$ memiliki nilai maksimum $y_{maks} = 1$ yang dicapai untuk $x = k \times 360°$, dengan $k \in \boldsymbol{B}$dan nilai minimum $y_{min} = -1$ yang dicapai untuk $x = 180° + k \times 360°$, dengan $k \in \boldsymbol{B}$.

G. Persamaan dan Pertidaksamaan Trigonometri

1. Persamaan Trigonometri

Persamaan trigonometri adalah suatu persamaan yang memuat satu atau lebih fungsi trigonometri dengan satu variable. Persamaan tersebut terbagi-bagi menjadi beberapa yakni:

a. Persamaan yang berbentuk $\sin px = a, \cos px = a, dan \tan px = a$, dengan a dan p konstanta

Teorema:

Jika sudut dalam derajat, maka berlaku

1) Jika $\sin px = a = \sin \alpha°$, maka $x = \frac{\alpha°}{p} + \frac{k \times 360°}{p}$ atau $x = \frac{180° - \alpha°}{p} + \frac{k \times 360°}{p}, k \in \boldsymbol{B}$.
2) Jika $\cos px = a = \cos \alpha°$, maka $x = \frac{\pm\alpha°}{p} + \frac{k \times 360°}{p}, k \in \boldsymbol{B}$.

3) Jika $\tan px = a = \tan \alpha°$, maka $x = \frac{\alpha°}{p} + \frac{k \times 180°}{p}, k \in \boldsymbol{B}.$

Jika sudut dalam derajat, maka berlaku

1) Jika $\sin px = a = \sin \alpha°$, maka $x = \frac{\alpha°}{p} + \frac{k \times 360°}{p}$ atau $x = \frac{180° - \alpha°}{p} + \frac{k \times 360°}{p}, k \in \boldsymbol{B}.$

2) Jika $\cos px = a = \cos \alpha°$, maka $x = \frac{\pm\alpha°}{p} + \frac{k \times 360°}{p}, k \in \boldsymbol{B}.$

3) Jika $\tan px = a = \tan \alpha°$, maka $x = \frac{\alpha°}{p} + \frac{k \times 180°}{p}, k \in \boldsymbol{B}.$

b. Persamaan trigonometri yang memuat jumlah atau selisih sinus atau kosinus

Persaman trigonometri yang memuat jumlah atau selisih sinus atau kosinus diubah menjadi bentuk persamaan yang memuat perkalian sinus atau kosinus atau sebaliknya.

c. Persamaan trigonometri yang dapat diubah menjadi persamaan kuadrat dalam sinus, kosinus, dan tangen

Persamaan trigonometri yang telah diubah menjadi persamaan kuadrat dalam sisnus, kosinus, atau tangen dapat dicari solusinya menggunakan metode faktorisasi (pemfaktoran), melengkapkan kuadrat sempurna, atau rumus kuadrat (rumus abc) dengan memperhatikan sifat-sifat trigonometri.

d. Persamaan trigonometri berbentuk $\boldsymbol{a \cos x + b \sin x = c}$

Menentukan solusi persamaan trigonometri berbentuk $a \cos x + b \sin x = c$ maka berlaku prosedur dengan:

1) Strategi 1

$$a \cos x + b \sin x = c \quad (kedua\ ruas\ dibagi\ a)$$

$$\cos x + \frac{b}{a} \sin x = \frac{c}{a}$$

Misalkan $\tan \alpha = \frac{b}{a}$, maka $\cos x + \tan x \sin x = \frac{c}{a}$ $\;(kedua\ ruas\ dikalikan \cos \alpha)$

$$\cos x \cos \alpha + \sin x \sin \alpha = \frac{c}{a} \cos \alpha$$

$$\cos(x - \alpha) = \frac{c}{a} \cos \alpha$$

Karena $\tan \alpha = \frac{b}{a}$, maka $\cos \alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$, sehingga

$$\cos(x - \alpha) = \frac{c}{a} \times \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

2) Strategi 2

$$a \cos x + b \sin x = c \quad (kedua\ ruas\ dibagi\ b)$$

$$\frac{a}{b} \cos x + \sin x = \frac{c}{b}$$

Misalkan $\tan\alpha = \frac{a}{b}$, maka $\tan\alpha\cos x + \sin x = \frac{c}{b}$ $(kedua\ ruas\ dikalikan\ \cos\alpha)$

$$\sin\alpha\cos x + \sin x\cos\alpha = \frac{c}{b}\cos\alpha$$

$$\sin(x+\alpha) = \frac{c}{b}\cos\alpha$$

Karena $\tan\alpha = \frac{a}{b}$, maka $\cos\alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$, sehingga

$$\sin(x+\alpha) = \frac{c}{b} \times \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Dari kedua strategi memperoleh persamaan terakhir dan dapat menentukan nilai x.

Catatan untuk memperoleh penyelesaian dari persamaan $a\cos x + b\sin x = c$ maka syaratnya adalah $c^2 \leq a^2 + b^2$.

e. Sistem persamaan trigonometri dengan dua variable

sistem persamaan trigonometri dengan dua variable memiliki beberapa jenis diantaranya, yakni:

a) $\begin{cases} \sin x : \sin y = p : q \\ x \pm y = \alpha \end{cases}$

b) $\begin{cases} \cos x : \cos y = p : q \\ x \pm y = \alpha \end{cases}$

c) $\begin{cases} \tan x : \tan y = p : q \\ x \pm y = \alpha \end{cases}$

d) $\begin{cases} \sin x \pm \sin y = k \\ x \pm y = \alpha \end{cases}$

e) $\begin{cases} \cos x \pm \cos y = k \\ x \pm y = \alpha \end{cases}$

f) $\begin{cases} \tan x \pm \tan y = k \\ x \pm y = \alpha \end{cases}$

2. Pertidaksamaan Trigonometri

Pertidaksamaan trigonometri yang sederhana adalah suatu pertidaksamaan yang memuat satu atau lebih fungsi trigonometri dengan satu variable. Cara menyelesaikan pertidaksamaan trigonometri tersebut dengan *diagram garis bilangan.*

Contoh Soal:

Tentukan himpunan penyelesaian dari pertidaksamaan $\sin x \geq -\frac{1}{2}$ dalam interval (selang) $0 \leq x \leq 2\pi$.

Penyelesaian

Langkah 1: Rubah bentuk soal menjadi berikut

$\sin x \geq -\frac{1}{2} \rightarrow \sin x + \frac{1}{2} \geq 0$ dan memisalkan $f(x) = \sin x + \frac{1}{2}$

Langkah 2: Menentukan pembuat nol fungsi dalam interval $0 \leq x \leq 2\pi$

$f(x) = 0$

$\sin x + \frac{1}{2} = 0$

$\sin x = -\frac{1}{2}$

$\sin x = \sin 210°$

$x = \frac{7\pi}{6} + k \times 2\pi$ atau $x = \left(\pi - \frac{7\pi}{6}\right) + k \times 2\pi, k \in \boldsymbol{B}.$

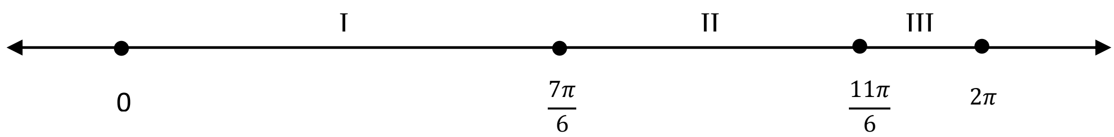
$x = \frac{7\pi}{6} + k \times 2\pi$ atau $x = \left(-\frac{\pi}{6}\right) + k \times 2\pi, k \in \boldsymbol{B}.$

$$k = 0 \rightarrow x = \frac{7\pi}{6}$$

$$k = 1 \rightarrow x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi = \frac{11\pi}{6}$$

Jadi, pembuat nol fungsi $f(x) = \sin x + \frac{1}{2}$ dalam interval $0 \leq x \leq 2\pi$ adalah $x = \frac{7\pi}{6}$ dan $x = \frac{11\pi}{6}$.

Langkah 3 : Gambarkan pembuat nol (dari langkah 2) pada diagram garis bilangan dalam interval $0 \leq x \leq 2\pi$.



Gambar 34.

Perhatikan, interval $0 \leq x \leq 2\pi$ terbagi menjadi tiga bagian yaitu interval I ($0 \leq x \leq \frac{7\pi}{6}$), interval II ($\frac{7\pi}{6} \leq x \leq \frac{11\pi}{6}$), dan interval III ($\frac{11\pi}{6} \leq x \leq 2\pi$).

Langkah 4 : Menentukan tanda daerah pada diagram garis bilangan (dari langkah 3) dengan cara menguji nilai-nilai sudut yang terletak pada interval I, II dan III.

Pilih salah satu titik $x = \frac{\pi}{2}$, subs ke $\sin x + \frac{1}{2} \geq 0$ shg

$\sin\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \geq 0$

$1 + \frac{1}{2} \geq 0$

$\frac{3}{2} \geq 0$

Jadi, setiap nilai x dalam interval I bernilai $(+)$

Pilih salah satu titik $x = \frac{4\pi}{3}$, subs ke $\sin x + \frac{1}{2} \geq 0$ shg $\sin\frac{4\pi}{3} + \frac{1}{2} \geq 0$

$-\frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2} \geq 0$

$-\sqrt{3} \geq 0$

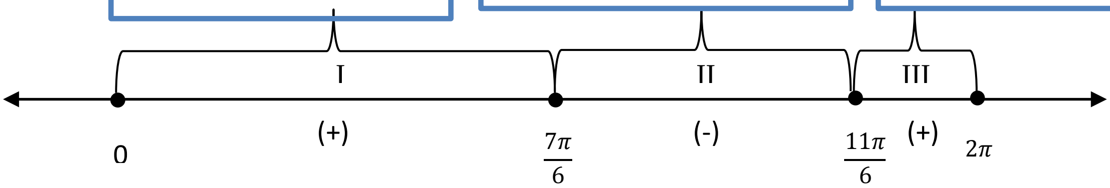
Jadi, setiap nilai x dalam interval II bernilai (-)

Pilih titik $x = {}^{11\pi}/_{12}$, subs ke $\sin x + \frac{1}{2} \geq 0$ shg $\sin\frac{11\pi}{12} + \frac{1}{2} \geq 0$

$0{,}259 + \frac{1}{2} \geq 0$

$0{,}759 \geq 0$

Jadi, setiap nilai x dalam interval III bernilai (+)



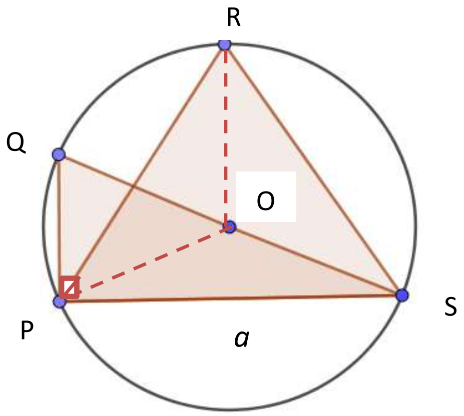
Langkah 5 : Menentukan himpunan penyelesaian pertidaksaman, Pertidasamaan yang memenuhi $\sin x \geq -\frac{1}{2}\ atau \sin x + \frac{1}{2} \geq 0$, adalah daerah yang bertanda positif (+), terletak pada interval I ($0 \leq x \leq \frac{7\pi}{6}$) atau interval III ($\frac{11\pi}{6} \leq x \leq 2\pi$).

Jadi , himpunan penyelesaiannya adalah $\left\{x \left| 0 \leq x \leq \frac{7\pi}{6}\right.\right\} \cup \{x \mid \frac{11\pi}{6} \leq x \leq 2\pi\}$.

H. Konsep aturan Sinus dan Aturan Kosinus

1. Konsep Aturan Sinus

Buktikan konsep aturan sinus tersebut dengan perhatikan gambar berikut:

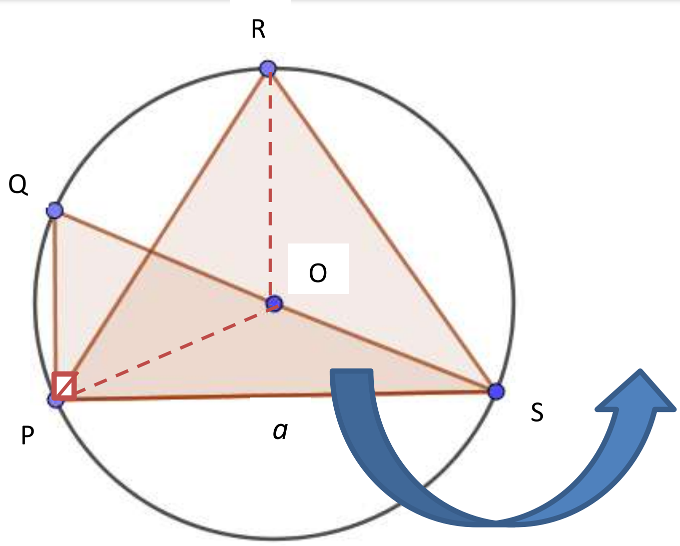


Gambar 36.

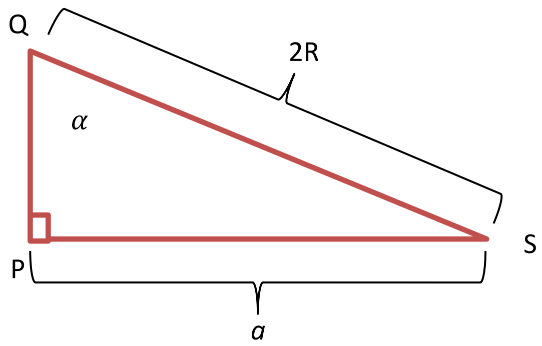
Diketahui suatu segitiga sembarang (ΔPRS) didalam lingkaran dengan pusat O, kemudian ditarik garis dari titik S ke pusat lingkaran yang diperpanjang hingga ke titik keliling lingkaran yakni titik Q sehingga dapat ditarik garis tegak lurus ke titik P. Jika $\angle PQS$ dan $\angle PRS$ adalah α maka sisi PS adalah a. Oleh karena itu, pada ΔPQS berlaku:

$$\sin \alpha = \frac{PS}{QS} = \frac{a}{d} = \frac{a}{2R} \quad \text{atau} \quad \frac{a}{\sin \alpha} = 2R$$

Dengan mempergunakan cara perbandingan, sebagai berikut:



Gamabar 37a.



Gambar 37b.

Dari Gambar 37b, dapat dibuat perbandingan:

$$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{2R}{\sin 90°}$$
$$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{2R}{1}$$
$$\frac{a}{\sin\alpha}=2R$$

(Terbukti)

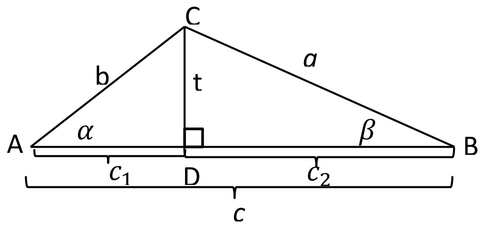
Sehingga berlaku juga untuk $\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}$ karena $\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}$.

Jadi, Konsep aturan sinus dipergunakan untuk menentukan panjang sisi sebuah segitiga dengan mempergunakan besar salah satu sudut segitiga dan panjang salah satu sisi segitiga. Konsep aturan sinus dapat ditulis:

$$\boldsymbol{\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}}$$

2. Konsep Aturan Kosinus

Membuktikan konsep aturan kosinus dengan perhatikan gambar berikut:



Gambar 38. Segitiga Sembarang

Dari Gambar 38. terlihat segitiga sembarang *ABC* , garis tinggi *CD* = *t* dan $c = c_1 + c_2$ sehingga membentuk dua segitiga siku-siku diperoleh $c_2 = \mathrm{a}\cos\beta$ serta berlaku teorema phytagoras, seperti:

$$t^2 = a^2 - {c_2}^2 \text{ dan } t^2 = b^2 - {c_1}^2$$

$$t^2 = t^2$$

$$a^2 - {c_2}^2 = b^2 - {c_1}^2$$

$$a^2 - b^2 = {c_2}^2 - {c_1}^2$$

$$a^2 - b^2 = (c_2 + c_1)(c_2 - c_1)$$

$$karena\ c_2 + c_1 = c$$

$$\rightarrow c_2 + c_1 - c_1 = c - c_1$$

$$\rightarrow c_2 - c_1 = c - c_1 - c_1$$

$$\rightarrow c_2 - c_1 = c - 2c_1$$

$$a^2 - b^2 = c(c - 2c_1)$$

$$a^2 - b^2 = c^2 - 2cc_1$$

$$a^2 - b^2 = c^2 - 2c(c - c_2)$$

$$a^2 - b^2 = c^2 - 2c^2 + 2cc_2$$

$$a^2 - b^2 = -c^2 + 2cc_2$$

$$a^2 + c^2 - b^2 = 2c(\mathrm{a}\cos\beta)$$

$$a^2 + c^2 - 2\,\mathrm{a}.c.\cos\beta = b^2$$

$$\boxed{\boldsymbol{b^2 = a^2 + c^2 - 2\,\mathrm{a}.c.\cos\beta}}$$

Jadi, menggunakan cara yang sama untuk membuktikan kebenara konsep aturan kosinus lainnya, dapat digunakan untuk menentukan panjang sisi dari suatu segitiga, sama halnya dengan konsep aturan sinus yang membedakan yakni jika panjang sisi yang diketahui dari suatu segitiga lebih dari satu sisi beserta besar salah satu sudut segitga tersebut. Konsep aturan cosinus lainnya, yakni:

$$\boldsymbol{a^2 = b^2 + c^2 - 2.b.c.\cos\alpha}$$

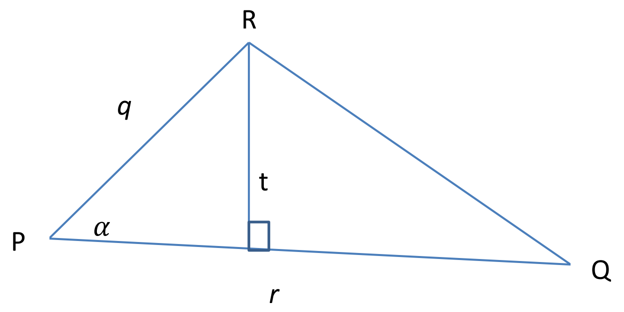
Atau

$$\boldsymbol{c^2 = a^2 + b^2 - 2.a.b.}$$

I. Konsep Luas Segitiga

Konsep luas segitiga dengan menerapkan trigonometri ini, sebenarnya tetap menggunakan konsep dasar dari luas segitiga yakni $L\Delta = \frac{1}{2} \times \boldsymbol{alas} \times \boldsymbol{tinggi}$. Perbedaannya dalam menentukan luas segitiga menggunakan trigonometri karena ada sudut yang diketahui dari salah satu sudut segitiga dengan kedua sisi segitiga yang mengapit sudut, atau ada dua sudut yang diketahui dengan satu sisi segitiga, atau hanya ada ketiga sisinya saja yang diketahui. Maka berlaku konsep luas segitiga sebagai berikut:

a. Luas Segitiga yang Diketahui Dua Sisi dan Sudut yang diapitnya



Gambar 39. Segitiga Sembarang dari Dua Segitiga Siku-siku

Dari gambar 39. Jika menentukan luas segitiga dari dua sisi segitiga yang mengapit satu sudut yang diketahui, maka berlaku:

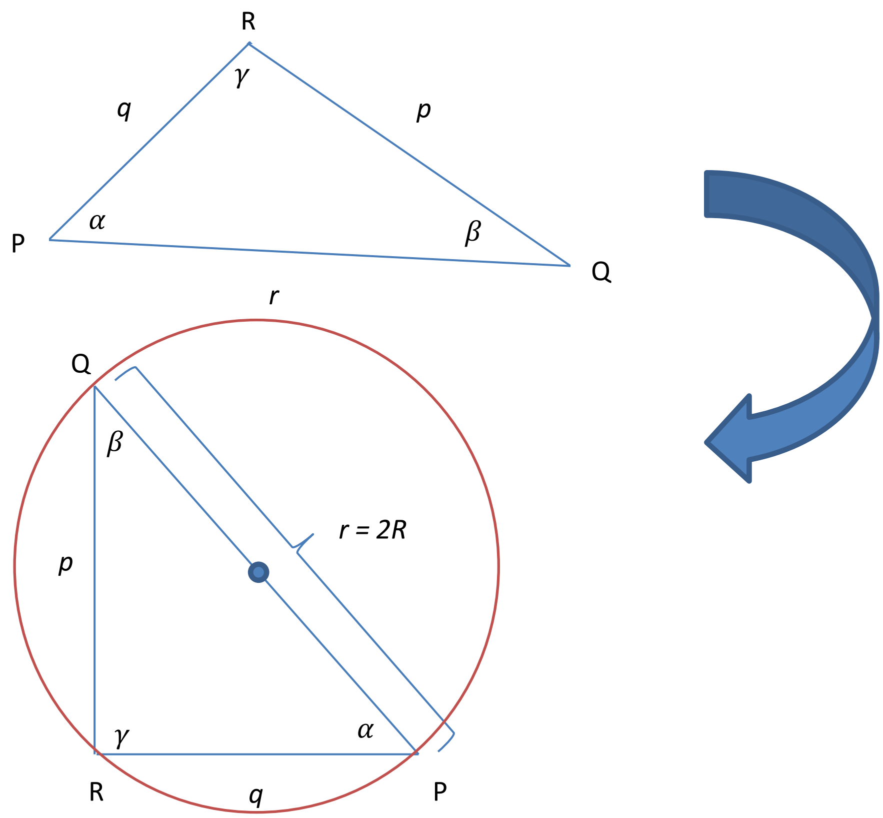
$$L\Delta = \frac{1}{2} \times alas \times tinggi$$

$$L\Delta = \frac{1}{2} \times r \times t \text{ , } \sin\alpha = \frac{t}{q} \to t = q\sin\alpha$$

$$L\Delta = \frac{1}{2} \times r \times (q\sin\alpha)$$

$$L\Delta = \frac{1}{2} qr\sin\alpha$$

b. Luas Segitiga yang Diketahui Dua Sudut dan Satu Sisinya



Dari gambar di atas terlihat bahwa sebenarnya ΔPQR merupakan segitiga siku-siku dengan sudut siku-siku *R*, menggunakan rumus luas segitiga sebelumnya, yakni

$L\Delta = \frac{1}{2} qr \sin\alpha$, dapat diturunkan lagi menjadi:

$$L\Delta = \frac{1}{2}\left(\frac{r}{\sin\gamma}\sin\beta\right) r \sin\alpha \longrightarrow$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \sin\beta = \frac{q}{r} \\ \to \sin\beta = \frac{q}{2R} \\ \to q = 2R\sin\beta \\ \to q = \frac{r}{\sin\gamma}\sin\beta \end{array}}$$

$$L\Delta = \frac{1(r)(r)\sin\beta\sin\alpha}{2\sin\gamma}$$

$$L\Delta = \frac{r^2\sin\alpha\sin\beta}{2\sin\gamma}$$

Dengan cara yang sama, dapat diperoleh juga penurunan rumus luas segitiga yang diketahui dua sudut dan satu sisinya yang lainnya, yakni:

$$\boldsymbol{L\Delta = \frac{p^2\sin\beta\sin\gamma}{2\sin\alpha}} \quad \text{atau} \quad \boldsymbol{L\Delta = \frac{q^2\sin\alpha\sin\gamma}{2\sin\beta}}$$

c. Luas Segitiga yang Diketahui Ketiga Sisinya

Penurunan rumus luas segitiga yang diketahui ketiga sisinya ini, berasal dari penurunan rumus luas segitiga yang diketahui dua sisi dan satu sudut yang diapitnya yakni:

$L\Delta = \frac{1}{2} qr\sin\alpha$ dengan bantuan aturan kosinus yang telah dibahas salah satunya $a^2 = b^2 + c^2 - 2.b.c.\cos\alpha$ atau $p^2 = q^2 + r^2 - 2.q.r.\cos\alpha$ sehingga dapat diperoleh:

$\cos\alpha = \frac{q^2+r^2-p^2}{2qr}$ serta bantuan rumus identitas $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$.

Jadi, $L\Delta = \frac{1}{2} qr\sin\alpha$

$$L\Delta = \frac{1}{2}qr\left(\sqrt{1-\cos^2\alpha}\right)$$

$$L\Delta = \frac{1}{2}qr\left(\sqrt{1-\left(\frac{q^2+r^2-p^2}{2qr}\right)^2}\right)$$

$$L\Delta = \frac{1}{2}qr\left(\sqrt{\left(1-\frac{q^2+r^2-p^2}{2qr}\right)\left(1+\frac{q^2+r^2-p^2}{2qr}\right)}\right)$$

$$L\Delta = \frac{1}{2}qr\left(\sqrt{\left(\frac{2qr-(q^2+r^2-p^2)}{2qr}\right)\left(\frac{2qr+(q^2+r^2-p^2)}{2qr}\right)}\right)$$

$$L\Delta = \frac{1}{2}qr\left(\sqrt{\left(\frac{p^2-(q^2-2qr+r^2)}{2qr}\right)\left(\frac{(q^2+2qr+r^2)-p^2}{2qr}\right)}\right)$$

$$L\Delta = \frac{1}{2}qr\left(\sqrt{\left(\frac{p^2-(q-r)^2}{2qr}\right)\left(\frac{(q+r)^2-p^2}{2qr}\right)}\right)$$

$$L\Delta = \frac{1}{2}qr\left(\sqrt{\left(\frac{(p-(q-r))(p+(q-r))}{2qr}\right)\left(\frac{((q+r)-p)((q+r)+p)}{2qr}\right)}\right)$$

$$L\Delta = \frac{1}{2}qr\left(\sqrt{\left(\frac{(p-q+r)(p+q-r)}{2qr}\right)\left(\frac{(q+r-p)(q+r+p)}{2qr}\right)}\right)$$

Jika $s = \frac{1}{2}(p+q+r)$ $maka$ $2s = p+q+r$ sehingga berlaku

2. $2s-2p = p+q+r-2p$

   $2s-2p = q+r-p$

2. $2s-2q = p+q+r-2q$

   $2s-2q = p+r-q$

6. $2s-2r = p+q+r-2r$

   $2s-2r = p+q-r$

$$L\Delta = \frac{1}{2}qr\left(\sqrt{\left(\frac{(2s-2q)(2s-2r)}{2qr}\right)\left(\frac{(2s-2p)(2s)}{2qr}\right)}\right)$$

$$L\Delta = \frac{1}{2}qr\left(\sqrt{\left(\frac{(2s-2q)(2s-2r)(2s-2p)(2s)}{4q^2r^2}\right)}\right)$$

$$L\Delta = \frac{1}{2}qr\left(\sqrt{\left(\frac{8(s-q)(s-r)(s-p)(s)}{4q^2r^2}\right)}\right)$$

$$L\Delta = \frac{1}{2}qr\left(\sqrt{\left(\frac{4(s-q)(s-r)(s-p)(s)}{q^2r^2}\right)}\right)$$

$$L\Delta = \frac{1}{2}qr\left(\frac{\sqrt{4(s-q)(s-r)(s-p)(s)}}{qr}\right)$$

$$L\Delta = \left(\frac{2qr\sqrt{(s-q)(s-r)(s-p)(s)}}{2qr}\right)$$

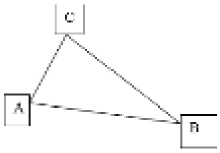
$$L\Delta = \sqrt{(s-q)(s-r)(s-p)(s)}$$

Jadi, penurunan rumus luas segitiga jika diketahui ketiga sisinya adalah

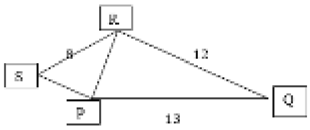
$$\boldsymbol{L\Delta = \sqrt{(s-q)(s-r)(s-p)(s)}}$$

LATIHAN

1. Jika a = 4, b= 6 , c= 3 maka berapa luas segitiga ABC?



2. Diketahui sudut S adalah 60°, Berapa luas segitiga PQR?



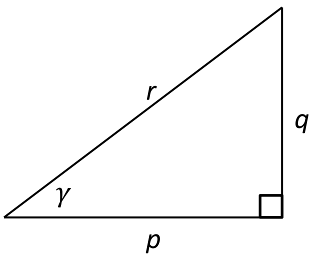
J. Aplikasi Trigonometri dalam Menyelesaikan Soal

Pada bahasan aplikasi trigonometri ini, merupakan penerapan dari semua penjelasan yang dijelaskan sebelumnya dalam kehidupan sehari-hari, contoh soalnya sebagai berikut:

a. Penerapan nilai maksimum dan minimum

Diketahui Tono akan membuat suatu pola dari kertas warna-warni berbentuk segitiga siku-siku untuk menghiasi dinding kamarnya, segitiga siki-siku tersebut mempunyai keliling 36 cm. Hitunglah panjang minimum sisi miringnya.

Penyelesaiannya:



Misalkan panjang sisi miring = r dan panjang sisi siku-sikunya adalah p dan q.

Sehingga $p + q + r = 36$

$r\cos\gamma + r\sin\gamma + r = 36$

$r(\cos\gamma + \sin\gamma + 1) = 36$

$r = \dfrac{36}{\cos\gamma + \sin\gamma + 1}$

r mencapai minimum, jika $\cos\gamma + \sin\gamma + 1$ bernilai maksimum maka

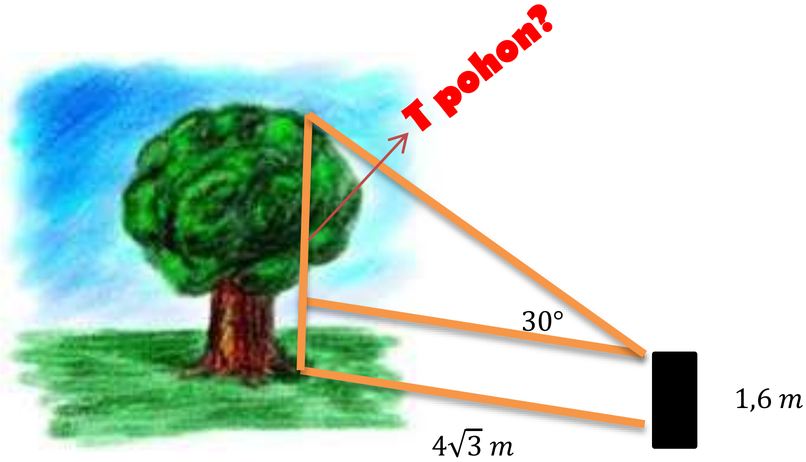
$$\frac{36}{\sqrt{1^2+1^2}+1} = \frac{36}{\sqrt{2}+1} \times \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}-1} = \frac{36(\sqrt{2}-1)}{1} = 36(\sqrt{2}-1)$$

Jadi, panjang minimum sisi miring segitiga tersebut adalah $36(\sqrt{2}-1)$ cm.

b. Penerapan identitas Trigonometri

Seorang Anak akan mengukur tinggi pohon yang berjarak $4\sqrt{3}$ m dari dirinya. Antara mata dengan puncak pohon tersebut terbentuk sudut elevasi 30°. Jika tinggi siswa tersebut adalah 1,6 m. Berapakah tinggi pohon?

Penyelesaiannya:



$$\tan 30° = \frac{tinggi\ pohon\ dari\ pucuk\ hingga\ setara\ pandangan\ mata}{jarak\ pohon\ dengan\ anak}$$

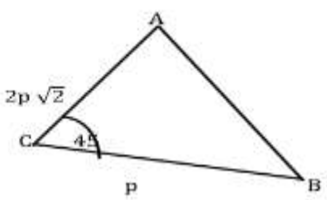
$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{y}{4\sqrt{3}}$$

$$y = \frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 4\ m$$

Jadi, tinggi pohon tersebut adalah tinggi anak + tinggi pohon dari pucuk setara pandangan mata anak = 1,6 m + 4 m = 5,6 m.

LATIHAN

1. A dan B merupakan titik-titik ujung sebuah terowongan yang terlihat dari titik C. Besar sudut penglihatan ACB adalah 45. Jika jarak CB = P meter dan CA = $2p\sqrt{2}$ meter, maka jarak terowongan dari A ke B adalah...



2. Diketahui sekeping keramik dipotong berbentuk segitiga sembarang dengan panjang sisi-sisi 10 cm,13 cm dan 17 cm. Berapa luas permukaan keramik tersebut?
3. Suatu Kota dan pusat air terpisah oleh gunung akan dibuat saluran air lurus menghubungkan kota dan pusat air dengan cara memuat terowongan. Untuk membuat garis lurus dari kota

kepusat air dilakukan pengukuran dengan pusat titik Q. Jarak kota ke Q adalah 55 km dan jarak pusat air ke Q adalah 20 km dan susut di Q adalah 80 . Untuk menentukan garis lurus dari kota ke pusat. Kita cukup menghitung besar sudut di kota dan pusat air pada segitiga yang ada. Hitung lah besar sudut tersebut..

DAFTAR PUSTAKA

Syarah, S.P. (2011). *IM-1 Intisari Matematika 1 Untuk SMA/MA Kelas X.* Yogyakarta: Andi.

Syarah, S.P. (2011). *IM-2 Intisari Matematika 2 Untuk SMA/MA Kelas XI.* Yogyakarta: Andi.

Tampomas, H. (2007). *Seribu Pena Matematika untuk SMA/MA Kelas XI.* Jakarta: Erlangga.

https://googleweblight.com/i?u=https://mathematics4us.com/perbandingan-trigonometri-pada-segitiga-siku-siku/&hl=id-ID

https://maths.id/pembuktian-identitas-trigonometri.php

https://www.slideshare.net/NoviSuryani2/kumpulan-soal-trigonometri-dan-pembahasannya?from_action=save