# Tranformasi Geometri

## A. PENDAHULUAN

- **Transformasi geometri** adalah proses pemindahan atau pembentukan hasil atau bayangan dari suatu titik atau kurva.

## B. JENIS-JENIS TRANSFORMASI GEOMETRI

- **Jenis-jenis transformasi geometri** terdiri dari translasi (pergeseran), transformasi bersesuaian matriks, refleksi (pencerminan), rotasi (perputaran), dan dilatasi (perkalian).

| Jenis | Keterangan | Persamaan | Matriks | Hasil Bayangan |
|---|---|---|---|---|
| **Translasi (T)** | | | | |
| pergeseran searah sumbu x sejauh a dan searah sumbu y sejauh b. | | $\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ | $x' = a + x$<br>$y' = b + x$ |
| **Transformasi bersesuaian matriks (M)** | | | | |
| transformasi oleh matriks berordo 2 x 2. | | $\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a & b\\c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}a & b\\c & d\end{pmatrix}$ | $x' = ax + by$<br>$y' = cx + dy$ |
| **Refleksi** | | | | |
| a. **Sumbu x (y = 0)** | pencerminan dengan cermin berupa suatu sumbu, garis atau titik. | $\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}$ | $x' = x$<br>$y' = -y$ |
| b. **Garis y = b** | | $\begin{pmatrix}x'\\y'-b\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y-b\end{pmatrix}$ | | $x' = x$<br>$y' = 2b - y$ |
| c. **Sumbu y (x = 0)** | | $\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}-1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$ | $x' = -x$<br>$y' = y$ |
| d. **Garis x = a** | | $\begin{pmatrix}x'-a\\y'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x-a\\y\end{pmatrix}$ | | $x' = 2a - x$<br>$y' = y$ |
| e. **Garis y = x** | | $\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}$ | $x' = y$<br>$y' = x$ |
| f. **Garis y = −x** | | $\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & -1\\-1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}0 & -1\\-1 & 0\end{pmatrix}$ | $x' = -y$<br>$y' = -x$ |
| g. **Titik O (0,0)** | | $\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}-1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}$ | $x' = -x$<br>$y' = -y$ |
| h. **Titik P (a,b)** | | $\begin{pmatrix}x'-a\\y'-b\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x-a\\y-b\end{pmatrix}$ | | $x' = 2a - x$<br>$y' = 2b - y$ |
| i. **Garis y = mx** | | $\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix} = \frac{1}{1+m^2}\begin{pmatrix}1-m^2 & 2m\\2m & -(1-m^2)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}\frac{1-m^2}{1+m^2} & \frac{2m}{1+m^2}\\ \frac{2m}{1+m^2} & \frac{-(1-m^2)}{1+m^2}\end{pmatrix}$ | $x' = \frac{x + 2my - m^2x}{1+m^2}$<br>$y' = \frac{-y + 2mx + m^2y}{1+m^2}$ |
| j. **Garis y = mx + n** | | $\begin{pmatrix}x'\\y'-n\end{pmatrix} = \frac{1}{1+m^2}\begin{pmatrix}1-m^2 & 2m\\2m & -(1-m^2)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y-n\end{pmatrix}$ | | ... |
| **Rotasi (R)** | | | | |
| a. **Pusat O(0,0) sejauh α** | perputaran terhadap suatu pusat dengan sudut tertentu.<br>-α jika searah jarum jam,<br>+α jika berlawanan. | $\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}$ | $x' = x.\cos\alpha - y.\sin\alpha$<br>$y' = x.\sin\alpha + y.\cos\alpha$ |
| b. **Pusat P(a,b) sejauh α** | | $\begin{pmatrix}x'-a\\y'-b\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x-a\\y-b\end{pmatrix}$ | | ... |
| **Dilatasi (D)** | | | | |
| a. **Pusat O(0,0), faktor skala k** | perkalian dari suatu pusat dengan faktor skala k.<br>k > 0 dilatasi searah,<br>k < 0 dilatasi berlawanan arah. | $\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}k & 0\\0 & k\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}k & 0\\0 & k\end{pmatrix}$ | $x' = kx$<br>$y' = ky$ |
| b. **Pusat P(a,b), faktor skala k** | | $\begin{pmatrix}x'-a\\y'-b\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}k & 0\\0 & k\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x-a\\y-b\end{pmatrix}$ | | $x' = k(x - a) + a$<br>$y' = k(y - b) + b$ |

## C. BAYANGAN TITIK, KURVA DAN BANGUN DATAR

- **Bayangan titik** dapat ditentukan menggunakan persamaan-persamaan transformasi.

Contoh 1:

Tentukan bayangan titik B(2, -1) oleh transformasi:

a. T(4,5)

$x' = 2 + 4 = 6$ B'(6,4)

$y' = -1 + 5 = 4$

b. Transformasi bersesuaian matriks $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$

$x' = (2).2 + (0).(-1) = 4$ B'(4, -7)

$y' = (-1).2 + (5).(-1) = -7$

c. Refleksi terhadap sumbu x

$x' = 2$ B'(2, 1)

$y' = -(-1) = 1$

d. Refleksi terhadap sumbu y

$x' = -2$ B'(-2, -1)

$y' = -1$

e. Refleksi terhadap titik P (4,5)

$x' = 2(4) - 2 = 6$ B'(6, 11)

$y' = 2(5) - (-1) = 11$

f. Refleksi terhadap garis y = 3x

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \frac{1}{1+(3)^2}\begin{pmatrix} 1-(3)^2 & 2.3 \\ 2.3 & -(1-(3)^2) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \frac{1}{10}.\begin{pmatrix} -8 & 6 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$x' = \frac{(-8).2 + 6.(-1)}{10} = -2{,}2$ B'(-2,2, 0,4)

$y' = \frac{(6).2 + 8.(-1)}{10} = 0{,}4$

g. Refleksi terhadap garis y = 3x + 1

$$\begin{pmatrix} x' \\ y'-1 \end{pmatrix} = \frac{1}{1+(3)^2}\begin{pmatrix} 1-(3)^2 & 2.3 \\ 2.3 & -(1-(3)^2) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ -1-1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y'-1 \end{pmatrix} = \frac{1}{10}.\begin{pmatrix} -8 & 6 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$x' = \frac{(-8).2 + 6.(-2)}{10} = -2{,}8$

$y' - 1 = \frac{(6).2 + 8.(-2)}{10} = -0{,}4 + 1 = 0{,}6$

B'(-2,8, 0,6)

Contoh 2:

Tentukan bayangan titik C(2, -4) yang diputar 30° searah jarum terhadap titik O.

Jawab:

$x' = 2.\cos(-30) - (-4).\sin(-30) = 2.\tfrac{1}{2}\sqrt{3} - 4.\tfrac{1}{2} = \sqrt{3} - 2$

$y' = 2.\sin(-30) + (-4).\cos(-30) = -2.\tfrac{1}{2} - 4.\tfrac{1}{2}\sqrt{3} = -1 - 2\sqrt{3}$

$C'(\sqrt{3} - 2, -1 - 2\sqrt{3})$

Contoh 3:

Tentukan titik Q jika Q'(8, -2) terjadi karena dilatasi pusat R(2,-1) dan faktor skala 2.

Jawab:

Gunakan invers matriks,

$$\begin{pmatrix} 8 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x-(2) \\ y-(-1) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x-2 \\ y+1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2(2) - 0(0)}\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 8 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x-2 \\ y+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$x - 2 = 4$ $x = 6$ Q(6, -2)

$y + 1 = -1$ $y = -2$

- **Bayangan kurva** dapat ditentukan dengan memasukkan nilai x' dan y' ke dalam persamaan kurva y = f(x) sehingga menjadi y' = f(x').

**Translasi**

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

**Transformasi geometri selain translasi**

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

- **Persamaan bayangan kurva** tidak perlu diberi tanda aksen pada x dan y nya.

Contoh 1:

Tentukan y = f(x') dari parabola $y = x^2 - 2x + 3$ oleh refleksi terhadap garis x = 2!

Jawab:

$x' = 2(2) - x$, sehingga $x = 4 - x'$

$y' = y$, sehingga $y = y'$

$(y') = (4 - x')^2 - 2(4 - x') + 3$

$y' = 16 - 8x' + x'^2 - 8 + 2x' + 3$ (hilangkan aksen)

$y = x^2 - 6x + 11$

Contoh 2:

Tentukan bayangan dari garis 2x + 4y – 3 = 0 oleh transformasi yang bersesuaian dengan $\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}$!

Jawab:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{(1)(6) - (-4)(-1)}.\begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \frac{1}{2}.\begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

$x = 3x' + 2y'$

$y = \tfrac{1}{2}x' + \tfrac{1}{2}y'$

$2(3x' + 2y') + 4(\tfrac{1}{2}x' + \tfrac{1}{2}y') - 3 = 0$

$6x' + 4y' + 2x' + 2y' - 3 = 0$ (hilangkan aksen)

$8x + 6y - 3 = 0$

Contoh 3:

Tentukan bayangan persamaan $4x^2 + 4y^2 – 3 = 0$ oleh dilatasi dengan pusat X(1,2) dan faktor skala 2!

Jawab:

$x' = 2(x – 1) + 1$ $\qquad$ $y' = 2(y – 2) + 2$

$x' = 2x – 2 + 1$ $\qquad$ $y' = 2y – 4 + 2$

$x = \frac{x'+1}{2}$ $\qquad$ $y = \frac{y'+2}{2}$

$4(\frac{x'+1}{2})^2 + 4(\frac{y'+2}{2})^2 – 3 = 0$

$x'^2 + 2x' + 1 + y'^2 + 4y' + 4 – 3 = 0$ (hilangkan aksen)

$\underline{x^2 + y^2 + 2x + 4y + 2 = 0}$

- **Bayangan bangun datar** dapat ditentukan dengan mentransformasikan titik-titiknya menjadi bayangannya, sehingga terbentuk bangun bayangan.
- **Luas bangun datar bayangan** berubah jika mengalami dilatasi dan transformasi bersesuaian matriks, namun tetap sebangun.
- **Luas bangun datar bayangan** dapat ditentukan:

**Dilatasi**

$$\mathbf{L' = k^2 + L}$$

k = faktor skala

**Transformasi bersesuaian matriks**

$$\mathbf{L' = |M|.\ L}$$

|M| = determinan matriks bersesuaian

## D. KOMPOSISI TRANSFORMASI GEOMETRI

- **Komposisi transformasi** (o) adalah kejadian dimana suatu titik atau kurva P mengalami transformasi A sehingga menghasilkan P′, dan dilanjutkan oleh transformasi B sehingga menghasilkan P″.

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "A"] \arrow[rr, bend right, "B \circ A"'] & P' \arrow[r, "B"] & P'' \end{tikzcd}$$

- **Penulisan komposisi transformasi:**

  **B∘A**, dibaca transformasi A dilanjutkan transformasi B.
- **Bayangan akhir** dicari dengan mentransformasikan titik atau kurva secara bertahap, atau dengan komposisi transformasi istimewa.
- **Komposisi transformasi** istimewa:

1) **Translasi** ($T_2 \circ T_1$)

   Matriks bersesuaian untuk komposisi translasi 1 dilanjutkan translasi 2:

$$\mathbf{T_2 \circ T_1 = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c+a \\ d+b \end{pmatrix}}$$

2) **Transformasi** ($M_2 \circ M_1$)

   Matriks bersesuaian untuk komposisi transformasi bersesuaian matriks 1 dilanjutkan transformasi bersesuaian matriks 2:

$$\mathbf{M_2 \circ M_1 = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}}$$

3) **Refleksi** ($Rf_2 \circ Rf_1$)

| Komposisi refleksi | Hasil bayangan |
|---|---|
| Terhadap garis x = a dilanjutkan garis x = b | $x' = 2(b – a) + x$<br>$y' = y$ |
| Terhadap garis y = a dilanjutkan garis y = b | $x' = x$<br>$y' = 2(b – a) + y$ |
| Terhadap garis yang tegak lurus | rotasi pada perpotongan garis sejauh 180° |
| Terhadap garis yang berpotongan ($m_1 = \tan\alpha$, $m_2 = \tan\beta$) | rotasi pada perpotongan garis sejauh $2(\beta – \alpha)$ |

4) **Rotasi** ($R_2 \circ R_1$)

   Rotasi 1 pada pusat P sejauh α dilanjutkan rotasi 2 pada **pusat P** sejauh β adalah rotasi dengan pusat P sejauh **(α + β).**

Contoh:

Tentukan bayangan garis $10x – 5y + 3 = 0$ oleh transformasi yang bersesuaian dengan $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ dilanjutkan $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$!

Jawab:

$M_2 \circ M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{(-3)(1) - (2)(-4)} . \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$

$x = \frac{1}{5}(-3x' + 2y')$

$y = \frac{1}{5}(-4x' + y')$

$10.(\frac{1}{5}(-3x' + 2y')) – 5.(\frac{1}{5}(-4x' + y')) + 3 = 0$

$2(-3x' + 2y') –(–4x' + y') + 3 = 0$

$-6x' + 4y' + 4x' – y' + 3 = 0$ (hilangkan aksen)

$\underline{3y – 2x + 3 = 0}$