

Limit

A. PENDAHULUAN

Limit adalah batas nilai suatu fungsi $f(x)$ untuk nilai x mendekati a dari kanan (a^+) dan kiri (a^-), dapat dinotasikan:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$$

B. LIMIT FUNGSI ALJABAR

Limit fungsi aljabar dapat dicari dengan memasukkan nilai x ke dalam fungsi.

Limit fungsi aljabar tak dapat berupa bentuk tak tentu, yaitu $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, dan $\infty - \infty$.

Limit fungsi aljabar $x \rightarrow a$ dengan bentuk tak tentu, dapat diselesaikan dengan cara menghilangkan pembuat nol, dengan:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0}$$

- 1) **Pemfaktoran.**
- 2) Perkalian dengan **bentuk sekawan.**
- 3) **Dalil L'Hospital** dengan turunan, yaitu:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Contoh pengerjaan yang dapat langsung dimasukkan nilai x nya:

Contoh 1:

$$\lim_{x \rightarrow 3} x^2 - 5x + 4 = (3)^2 - 5(3) + 4 = \underline{-2}$$

Contoh 2:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-1}{x-2} = \frac{1}{0} = \infty$$

Contoh pengerjaan dengan pemfaktoran:

Contoh 1:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x+1)(x-1)}{(x-1)} = 1 + 1 = \underline{2}$$

Contoh 2:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-4}{x^2+x-6} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(x+3)} = \frac{(2+2)}{(2+3)} = \underline{\frac{4}{5}}$$

Contoh pengerjaan dengan perkalian sekawan:

Contoh 1:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-4}{x-\sqrt{6-x}} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x^2-4)(x+\sqrt{6-x})}{x^2-(6-x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x+2)(x+\sqrt{6-x})}{x^2+x-6} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x+2)(x+\sqrt{6-x})}{(x-2)(x+3)} \end{aligned}$$

$$= \frac{(2+2)(2+\sqrt{6-2})}{(2+3)} = \frac{16}{5}$$

Contoh 2:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x-\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x-\sqrt{x})(x-\sqrt{x})}{x^2-x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2-2x\sqrt{x}+x}{x^2-x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(x-2\sqrt{x}+1)}{x(x-1)} \\ &= \frac{(0-2\sqrt{0}+1)}{(0-1)} = \underline{-1} \end{aligned}$$

Contoh pengerjaan dalil L'Hospital:

Contoh 1:

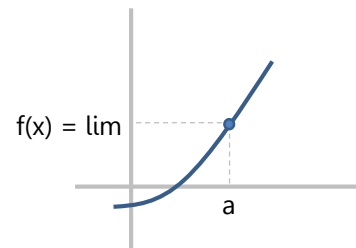
$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x^3-5x^2-2x-3}{4x^3-13x^2+4x-3} &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{6x^2-10x-2}{12x^2-26x+4} \\ &= \frac{6(3)^2-10(3)-2}{12(3)^2-26(3)+4} = \underline{\frac{11}{17}} \end{aligned}$$

Contoh 2:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{4x-6-\sqrt{x^2+3x+18}}{3-x} &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{4-\frac{2x+3}{2\sqrt{x^2+3x+18}}}{-1} \\ &= \frac{4-\frac{2(3)+3}{2\sqrt{(3)^2+3(3)+18}}}{-1} = \underline{-\frac{13}{4}} \end{aligned}$$

Grafik limit fungsi aljabar dapat menggambarkan nilai $f(x)$ kontinu dan diskontinu pada limit.

Nilai $f(x)$ kontinu adalah nilai dimana grafik limit di sekitar titik $x = a$ berkelanjutan.



Syarat $f(x)$ kontinu di $x = a$:

- 1) Nilai $f(a)$ dan limit $f(x)$ $x \rightarrow a$ **terdefinisi.**
- 2) Nilai $f(x)$ **sama dengan** nilai limit $f(x)$ $x \rightarrow a$.

$$f(a) = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$$

Contoh:

$$f(x) = \begin{cases} x^2+x-2, & x \neq -2 \\ 3a+6, & x = -2 \end{cases}$$

Jika $f(x)$ kontinu di $x = -2$, maka nilai a adalah?

Jawab:

Nilai $f(-2)$ dicari menggunakan persamaan 2, sedangkan nilai limit $f(x)$ $x \rightarrow -2$ dicari menggunakan persamaan 1.

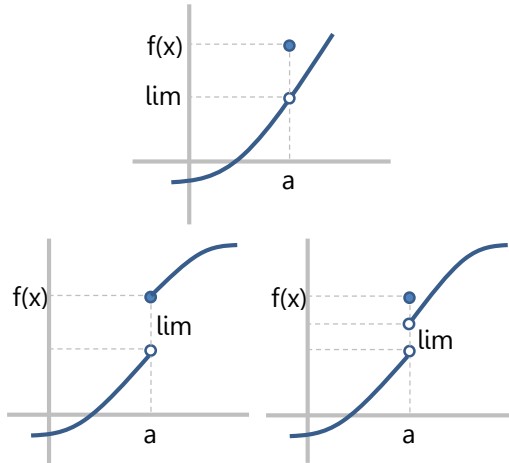
$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2+x-2}{\sqrt{x+6}-2} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x+2)(x-1)(\sqrt{x+6}-2)}{x+6-4}$$

$$= (-2-1)(\sqrt{-2+6}-2) = -12$$

$$f(-2) = \lim_{x \rightarrow -2} f(x)$$

$$3a + 6 = -12 \quad a = -6$$

Nilai f(x) diskontinu adalah nilai dimana grafik di sekitar titik $x = a$ tidak terdefinisi dan tidak mempunyai nilai limit.



Contoh:

Pada interval berapa $f(x) = \frac{x^2-9}{\sqrt{x^2-4x-5}}$ diskontinu?

Jawab:

Agar $f(x)$ tidak terdefinisi (bentuk $\frac{a}{0}$ dan $\sqrt{<0}$), maka dapat dibuat:

$$x^2 - 4x - 5 \leq 0$$

$$(x-5)(x+1)$$

$$x = 5 \quad x = -1$$



$f(x)$ tak terdefinisi pada interval $-1 \leq x \leq 5$.

Limit fungsi aljabar $x \rightarrow \infty$ dengan bentuk tak tentu, dapat diselesaikan dengan:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax^n + bx^{n-1} + \dots}{px^m + qx^{m-1} + \dots} = \frac{\infty}{\infty}$$

n = pangkat x tertinggi (derajat) pembilang

m = pangkat x tertinggi (derajat) penyebut

1) **Jika $n = m$,**

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a}{p}$$

Untuk mempercepat hitungan, hanya hitung x yang mungkin memiliki pangkat tertinggi.

2) **Jika $n > m$,**

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \pm \infty$$

3) **Jika $n < m$,**

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

Contoh pengerjaan:

Contoh 1:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - x + 1}{(1-3x)(x+2)} = \frac{2x^2 \dots}{-3x^2 \dots} = -\frac{2}{3}$$

Contoh 2:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + x - 3}{x + 1} = \frac{2x^2 \dots}{x \dots} = \infty$$

Limit fungsi aljabar $x \rightarrow \infty$ dengan bentuk tak tentu:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{ax^n + bx^{n-1} + \dots} - \sqrt{px^n + qx^{n-1} + \dots} = \infty - \infty$$

dapat diselesaikan dengan:

1) **Jika $a = p$,**

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) - g(x) = \frac{b - q}{n \sqrt[n]{a^{n-1}}}$$

2) **Jika $a > p$,**

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) - g(x) = +\infty$$

3) **Jika $a < p$,**

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) - g(x) = -\infty$$

Contoh:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{4x^2 + x + 1} - 2x + 3 &= \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{4x^2 + x + 1} - \sqrt{(2x-3)^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{4x^2 + x + 1} - \sqrt{2x^2 - 12x + 9} \\ &= -\frac{1}{12} \end{aligned}$$

Sifat-sifat operasi bilangan tak hingga (∞):

1. $a \pm \infty = \pm \infty$
2. $a \cdot \infty = \infty$
3. $\infty \cdot \infty = \infty$
4. $k \cdot \infty = \infty$
5. $\frac{a}{\infty} = 0$
6. $\frac{a}{0} = \infty, a \neq 0$

C. LIMIT FUNGSI TRIGONOMETRI

Limit fungsi trigonometri dapat dicari dengan memasukkan nilai x ke dalam fungsi.

Limit fungsi trigonometri tak dapat berupa bentuk tak tentu, yaitu $\frac{0}{0}$.

Limit fungsi trigonometri dengan bentuk tak tentu, dapat diselesaikan dengan cara menghilangkan pembuat nol, dengan:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0}$$

- 1) Fungsi trigonometri istimewa ($x \rightarrow a$)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\tan x} = 1$$

- 2) Mengubah fungsi trigonometri lain menjadi fungsi trigonometri istimewa dengan menggunakan identitas dan rumus trigonometri.

Identitas

$$\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$$

Rumus sudut rangkap

$$\sin 2A = 2 \sin A \cos A$$

$$\cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A$$

$$\cos 2A = 2 \cos^2 A - 1 = 1 - 2 \sin^2 A$$

$$\tan 2A = \frac{2 \tan A}{1 - \tan^2 A}$$

Rumus jumlah-selisih dan perkalian

$$\sin(A + B) + \sin(A - B) = 2 \sin A \cos B$$

$$\sin(A + B) - \sin(A - B) = 2 \cos A \sin B$$

$$\cos(A + B) + \cos(A - B) = 2 \cos A \cos B$$

$$\cos(A + B) - \cos(A - B) = -2 \sin A \sin B$$


$$\sin A + \sin B = 2 \sin \frac{1}{2}(A + B) \cos \frac{1}{2}(A - B)$$

$$\sin A - \sin B = 2 \cos \frac{1}{2}(A + B) \sin \frac{1}{2}(A - B)$$

$$\cos A + \cos B = 2 \cos \frac{1}{2}(A + B) \cos \frac{1}{2}(A - B)$$

$$\cos A - \cos B = -2 \sin \frac{1}{2}(A + B) \sin \frac{1}{2}(A - B)$$

- 3) Jika fungsi trigonometri pada limit sudah menjadi bentuk perkalian, fungsi sin dan tan dapat dicoret (selama tidak ada fungsi lain yang tidak dapat dicoret).

 **Contoh** pengerjaan limit trigonometri:

Contoh 1:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos x - \sin x}{\cos 2x} &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos x - \sin x}{\cos^2 x - \sin^2 x} \\ &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos x - \sin x}{(\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1}{(\cos x + \sin x)} = \frac{1}{2} \sqrt{2} \end{aligned}$$

Contoh 2:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \sin 4x}{5 \tan 6x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \sin 4x}{5 \tan 6x} = \frac{3 \cdot 4x}{5 \cdot 6x} = \frac{2}{5}$$

Contoh 3:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 4x}{x \tan 3x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - (1 - 2 \sin^2 2x)}{x \tan 3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 2x}{x \tan 3x} \\ &= \frac{2(2x)^2}{x \cdot 3x} = \frac{8}{3} \end{aligned}$$

Contoh 4:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} \frac{(2a+x) \sin(a-x)}{x^2 - a^2} &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{(2a+x) \sin(a-x)}{-(x+a)(x-a)} \\ &= \frac{(2a+a)}{-(a+a)} = -\frac{3}{2} \end{aligned}$$

Contoh 5:

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^4 - 9x^2}{\sin(9 - x^2)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{-x^2(-x^2 + 9)}{\sin(9 - x^2)} = -(3)^2 = -9$$

Contoh 6:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos 2x}{\cos x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 + 2 \cos^2 x - 1}{\cos x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{2 \cos^2 x}{\cos x} = 0$$

D. SIFAT-SIFAT LIMIT

 **Sifat-sifat** operasi hitung limit:

- 1) **Penjumlahan dan pengurangan**

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) \pm g(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

- 2) **Perkalian**

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot g(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

- 3) **Pembagian**

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}$$

- 4) **Perpangkatan**

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^2 = [\lim_{x \rightarrow a} f(x)]^2$$