INVERS DAN KOMPOSISI FUNGSI

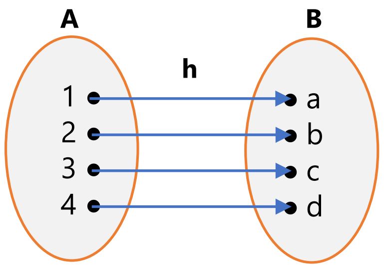
A. INVERS FUNGSI

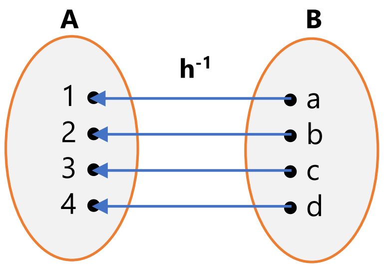
- **Invers fungsi** ($f^{-1}(x)$) adalah kebalikan dari fungsi f(x) yang juga merupakan sebuah fungsi.
- **Syarat agar suatu fungsi** memiliki invers:
  a. f(x) harus merupakan fungsi bijektif.
  b. Grafik fungsi tidak boleh membalik.
- **Contoh invers fungsi** dari berbagai cara penyajian fungsi:

1) **Diagram panah**

Dapat dilakukan dengan membalik arah panah.

Contoh:





2) **Pasangan berurutan**

<u>Berlaku</u>: $Df = Rf^{-1}$

$Rf = Df^{-1}$

Contoh:

f = {(1, 5)(2, 8)(3, 10)(4, 13)}

f^{-1} = {(5, 1)(8, 2)(10, 3)(13, 4)}

3) **Rumus fungsi**

<u>Berlaku</u>: f(x) = a, maka inversnya:

$f^{-1}(a) = x$

Contoh:

Tentukan invers dari fungsi berikut!

Fungsi linear : $f(x) = 2x + 1$

$f^{-1}(2x + 1) = x \qquad y = 2x + 1$

$x = \frac{y - 1}{2}$, maka

$f^{-1}(x) = \frac{x - 1}{2}$

Fungsi pecahan: $f(x) = \frac{3 - x}{2x + 5}$, $x \neq -{}^5/_2$

$f^{-1}(\frac{3 - x}{2x + 5}) = x \qquad y = \frac{3 - x}{2x + 5}$

$2xy + 5y = 3 - x$

$2xy + x = 3 - 5y$

$x(2y + 1) = 3 - 5y$

$x = \frac{3 - 5y}{2y + 1}$

$f^{-1}(x) = \frac{3 - 5x}{2x + 1}$

Fungsi kuadrat: $f(x) = x^2 - 6x - 7$, $x \geq 3$

$f^{-1}(x^2 - 6x - 7) = x \qquad y = x^2 - 6x - 7$

$x^2 - 6x = y + 7$

$(x - 3)^2 - 9 = y + 7$

$x - 3 = \pm\sqrt{y + 16}$

$x = 3 \pm \sqrt{y + 16}$

karena $x \geq 3$, maka:

$f^{-1}(x) = 3 + \sqrt{x + 16}$

Fungsi polinomial: $f(x) = x^3 + 2$

$f^{-1}(x^3 + 2) = x \qquad y = x^3 + 2$

$x^3 = 2 - y$

$x = \sqrt[3]{2 - y}$

$f^{-1}(x) = \sqrt[3]{2 - x}$

Fungsi akar: $f(x) = \sqrt{2x - 5}$

$f^{-1}(\sqrt{2x - 5}) = x \qquad y = \sqrt{2x - 5}$

$y^2 = 2x - 5$

$2x = y^2 + 5$

$x = \frac{y^2 + 5}{2}$

$f^{-1}(x) = \frac{x^2 + 5}{2}$

Fungsi logaritma: $f(x) = {}^2\log(x - 3) - 4$

$f^{-1}({}^2\log(x - 3) - 4) = x$

$y = {}^2\log(x - 3) - 4$

$y + 4 = {}^2\log(x - 3)$

$2^{y + 4} = x - 3$

$x = 2^{y + 4} + 3$

$f^{-1}(x) = 2^{x + 4} + 3$

Fungsi eksponen: $f(x) = 3^{x+1} - 5$

$f^{-1}(3^{x+1} - 5) = x \qquad y = 3^{x+1} - 5$

$y + 5 = 3^{x+1}$

${}^{3}\log(y + 5) = x + 1$

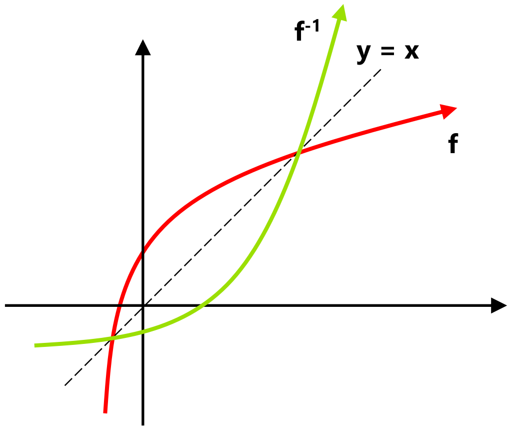
$x = {}^{3}\log(y + 5) - 1$

$f^{-1}(x) = {}^{3}\log(x + 5) - 1$

4) **Grafik**

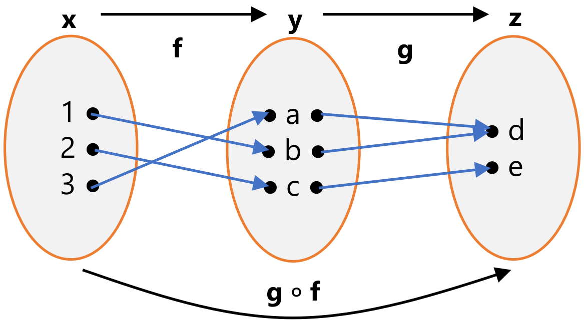
Invers $f^{-1}(x)$ pada grafik adalah sebuah garis yang simetris terhadap f(x) pada cermin y = x.

Grafik yang memiliki invers fungsi adalah grafik yang jika dibuat garis mendatar hanya memotong satu titik saja.



B. KOMPOSISI FUNGSI

- **Komposisi fungsi** (o) adalah kejadian dimana fungsi f yang memetakan anggota x ke y, dilanjutkan oleh fungsi g yang memetakan y ke z.



f(x) = y	atau	f = {(x, y)}
g(y) = z	atau	g = {(y, z)}

sehingga, g∘f(x) = g(f(x)).

atau g∘f = {(x, z)}

- **Penulisan komposisi fungsi:**

g∘f(x) dibaca f dilanjutkan g

dapat ditulis **gf(x)** atau **g(f(x)).**

- **Pada komposisi fungsi:**

a. Irisan daerah hasil fungsi f dengan daerah asal fungsi g bukan himpunan kosong.

b. Daerah asal fungsi komposisi g∘f adalah daerah asal fungsi f.

c. Daerah hasil fungsi komposisi g∘f adalah daerah hasil fungsi g.

- **Komposisi fungsi** dalam berbagai penyajian data:

1) **Pasangan berurutan**

Contoh:

Jika diketahui:

f = {(1, 2)(2, 3)(3, 4)(4, 1)}

g = {(1, 3)(2, 2)(3, 1)(4, 4)}

Maka Rg = Df. Tentukan:

f∘g = {(1, 4)(2, 3)(3, 2)(4, 1)}

g∘f = {(1, 2)(2, 1)(3, 4)(4, 3)}

f∘g∘f = {(1, 3)(2, 2)(3, 1)(4, 4)}

2) **Rumus fungsi**

Contoh:

Jika diketahui:

$$f(x) = \begin{cases} x + 2, \text{ jika } x < -1 \\ x^2 - 3, \text{ jika } -1 \le x < 4 \\ \sqrt{x - 4}, \text{ jika } x \ge 4 \end{cases}$$

g(x) = 2x + 2

Tentukan:

f∘f∘f∘f(5) $= f(f(f(f(5))))$

$= f(f(f(\sqrt{5 - 4}))) = f(f(f(1)))$

$= f(f(1^2 - 3)) = f(f(-2))$

$= f(-2 + 2) = f(0)$

$= 0^2 - 3$

f∘f∘f∘f(5) = -3

g∘f∘g(3) $= g(f(g(3)))$

$= g(f(2(3) + 2)) = g(f(8))$

$= g(\sqrt{8 - 4}) = g(2)$

$= 2(2) + 2$

g∘f∘g(3) = 6

C. SIFAT DAN ALJABAR FUNGSI

Sifat-sifat invers dan komposisi fungsi:

Involusi	$(f^{-1})^{-1} = f$
Identitas	$f \circ I = I \circ f = f$
	$f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = I = x$
Tidak komutatif	$f \circ g \neq g \circ f$
Asosiatif	$(f \circ g \circ h) = ((f \circ g) \circ h) = (f \circ (g \circ h))$

Invers komposisi	$(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$	
	$(f \circ g \circ h)^{-1} = h^{-1} \circ g^{-1} \circ f^{-1}$	
Lain-lain	Jika $f \circ g = h$, maka:	
	$f = h \circ g^{-1}$	$g = f^{-1} \circ h$
	Jika $f \circ g \circ h = k$, maka:	
	$f = k \circ (g \circ h)^{-1}$	$g = f^{-1} \circ k \circ h^{-1}$
	$h = (f \circ g)^{-1} \circ k$	

Sifat-sifat aljabar fungsi:

Penjumlahan

$(f+g)(x) = f(x)+g(x)$	$Df \cap Dg = D_{f+g}$

Pengurangan

$(f-g)(x) = f(x)-g(x)$	$Df \cap Dg = D_{f-g}$

Perkalian

$(f.g)(x) = f(x).g(x)$	$Df \cap Dg = D_{fg}$

Pembagian

$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$	$Df \cap Dg = D^{f}/_{g}$	$g(x) \neq 0$