MODUL 1

Induksi Matematika dan Teorema Binomial

Drs. Sukirman, M.Pd.

PENDAHULUAN

Induksi matematika merupakan salah satu metode pembuktian dari banyak teorema dalam teori bilangan ataupun dalam mata kuliah matematika lainnya. Sementara itu, teorema binomial, selain sebagai dasar, banyak digunakan dalam penurunan beberapa teorema dan pemecahan masalah dalam matematika.

Oleh karena itu, dalam mempelajari mata kuliah ini, Anda diharapkan dapat menerapkan induksi matematika dan teorema binomial dalam pembuktian dan dalam pemecahan soal-soal matematika. Secara lebih perinci, setelah mempelajari modul ini, Anda diharapkan dapat

1. menentukan langkah-langkah yang harus ditempuh dalam pembuktian dengan induksi matematika;
2. menentukan basis induksi dalam pembuktiannya;
3. menentukan langkah induksi dalam pembuktiannya;
4. terampil menerapkan langkah-langkah pembuktian dengan induksi matematika;
5. menghitung koefisien binomial;
6. menentukan sifat-sifat koefisien binomial;
7. menerapkan sifat-sifat koefisien binomial dalam pemecahan masalah terkait.

Penguasaan kemampuan-kemampuan tersebut sangat penting bagi mereka yang akan mempelajari matematika karena banyak mata kuliah matematika yang menggunakan prinsip-prinsip tersebut untuk menurunkan teorema atau untuk pemecahan masalah. Hampir setiap modul berikutnya menggunakan dua prinsip tersebut, baik untuk membuktikan teorema maupun untuk memecahkan soal-soalnya.

Untuk membantu Anda menguasai kemampuan tersebut, dalam modul ini disajikan uraian materi dan contoh-contohnya, latihan memecahkan soal, dan tes pada tiap kegiatan belajar. Modul ini terdiri atas dua kegiatan belajar.
Kegiatan Belajar 1 : Induksi Matematika
Kegiatan Belajar 2 : Teorema Binomial

Agar Anda berhasil dengan baik dalam mempelajari modul ini, ikutilah petunjuk belajar berikut ini.

1. Bacalah dengan cermat pendahuluan ini sehingga Anda memahami gambaran secara global isi modul, untuk apa dipelajari, dan bagaimana mempelajarinya.
2. Bacalah dengan saksama uraian materi dan contoh-contohnya. Jika perlu, carilah contoh lain. Berilah tanda-tanda pada bagian-bagian yang Anda anggap penting.
3. Kunci utama agar berhasil dalam belajar matematika adalah kesanggupan untuk berlatih memecahkan soal-soal. Oleh karena itu, kerjakanlah soal-soal latihan, baik secara individual, dalam kelompok kecil, maupun dalam tutorial, untuk pemantapan.

KEGIATAN BELAJAR 1

Induksi Matematika

Induksi matematika merupakan salah satu argumentasi deduktif untuk pembuktian suatu teorema atau pernyataan matematika yang semesta pembicaraannya himpunan bilangan bulat atau lebih khusus himpunan bilangan asli. Karena semesta pembicaraan dalam teori bilangan adalah himpunan bilangan bulat, induksi matematika merupakan salah satu metode pembuktian yang banyak digunakan. Oleh karena itu, penguasaan kemampuan-kemampuan tersebut sangat penting bagi mereka yang akan mempelajari matematika karena banyak bahasan dalam matematika yang menggunakan prinsip-prinsip tersebut untuk menurunkan teorema atau untuk pemecahan masalah. Hampir setiap bahasan berikutnya nanti menggunakan dua prinsip tersebut, baik untuk membuktikan teorema maupun untuk memecahkan soal-soalnya.

Perhatikan contoh pernyataan-pernyataan matematika berikut ini.

Contoh 1.1

$1+2+3+...+n=\frac{1}{2}n\,(n+1)$, untuk setiap bilangan asli n.

Benarkah pernyataan ini? Untuk menjawab pertanyaan ini, kita dapat mencobanya dengan menyubstitusikan n dalam pernyataan itu dengan sembarang bilangan asli.

Apabila $n = 1$, pernyataan itu menjadi $1 = \frac{1}{2}.\ 1(1 + 1)$, atau $1 = 1$, yaitu diperoleh suatu pernyataan yang benar.

Apabila $n = 2$, pernyataan itu menjadi $1 + 2 = \frac{1}{2}.\ 2(2 + 1)$, atau $3 = 3$, yaitu diperoleh suatu pernyataan yang benar.

Apabila $n = 3$, pernyataan itu menjadi $1 + 2 + 3 = \frac{1}{2}.\ 3(3 + 1)$ atau $6 = 6$, yaitu suatu pernyataan yang benar pula.

Anda dapat melanjutkannya untuk n = 4; 5; atau bilangan asli lainnya dan akan selalu memperoleh pernyataan yang bernilai benar. Apakah memberikan beberapa contoh dengan substitusi n pada pernyataan semula dan diperoleh pernyataan-pernyataan yang benar sudah memberikan bukti tentang kebenaran pernyataan tersebut? Dalam matematika, pemberian beberapa contoh bukan merupakan bukti dari kebenaran suatu pernyataan yang berlaku dalam himpunan semesta. Pada contoh di atas, himpunan semestanya adalah himpunan semua bilangan asli. Apabila kita dapat memberikan contoh untuk setiap bilangan asli n pada pernyataan tersebut dan masing-masing memperoleh pernyataan yang benar, hal tersebut dapat merupakan bukti kebenaran dari pernyataan itu. Akan tetapi, hal ini tidak efisien dan tidak mungkin kita lakukan karena banyaknya anggota himpunan bilangan asli adalah tak berhingga.

Lalu, bagaimana cara membuktikan pernyataan tersebut? Salah satu caranya adalah memandang ruas pertama dari pernyataan itu sebagai deret aritmetika dengan suku pertama a = 1, bedanya b = 1, suku terakhirnya ialah $U_n = n$ dan memiliki n buah suku. Maka itu, jumlah deret itu sebagai berikut.

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{2}\, n\,(a + U_n) \\ &= \frac{1}{2}\, n\,(1 + n) \\ &= \frac{1}{2}\, n\,(n + 1), \text{ yaitu ruas kedua dari pernyataan yang dibuktikan.} \end{aligned}$$

Cara lain untuk membuktikan pernyataan itu dilakukan dengan induksi matematika. Langkah-langkah pembuktian dengan induksi matematika sebagai berikut.

Misalkan, $p(n)$ adalah suatu proposisi yang akan dibuktikan benar untuk setiap bilangan asli n. Langkah-langkah pembuktian dengan induksi matematika sebagai berikut.

Langkah (I) : ditunjukkan bahwa p(l) benar.

Langkah (II) : diasumsikan bahwa $p(k)$ benar untuk suatu bilangan asli k dan ditunjukkan bahwa $p(k+1)$ benar.

Jika langkah-langkah (I) dan (II) berhasil ditunjukkan kebenarannya, selanjutnya disimpulkan bahwa $p(n)$ benar untuk setiap bilangan asli n.

Mengapa hanya dua langkah tersebut membuktikan bahwa $p(n)$ benar untuk setiap bilangan asli? Jika langkah (I) berhasil, yaitu $p(l)$ benar, dan jika langkah (II) berhasil, $p(2)$ benar. Selanjutnya, karena $p(2)$ benar, menurut langkah (II), $p(3)$ benar pula. Menurut langkah (II) lagi, $p(4)$ benar pula dan seterusnya sehingga $p(n)$ benar untuk setiap bilangan asli n. Langkah (I) di atas sering disebut **basis (dasar) induksi** dan langkah (II) disebut **langkah induksi.**

Kita sekarang menerapkan langkah-langkah pembuktian dengan induksi matematika itu untuk membuktikan pernyataan pada Contoh 1.1 di atas.

Contoh 1.2

Buktikan bahwa $1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{1}{2}\, n\,(n + 1)$ untuk setiap bilangan asli n.

Bukti

Misalkan, $p(n)$ menyatakan $1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{1}{2}\, n\,(n + 1)$.

Langkah (I): $p(1)$ adalah $1 = \frac{1}{2}\, 1\,(1 + 1)$, yaitu 1 = 1, jelas benar.

Langkah (II): diasumsikan bahwa $p(k)$ benar untuk suatu bilangan asli k, yaitu

$$1 + 2 + 3 + ... + k = \frac{1}{2}k(k + 1) \text{ benar.}$$

Selanjutnya, harus ditunjukkan bahwa $p(k+l)$ benar, yaitu

$$1 + 2 + 3 + ... + k + (k + 1) = \frac{1}{2}(k + 1)(k + 2).$$

Hal ini ditunjukkan sebagai berikut.

$$1 + 2 + 3 + ...+ k + (k+1) = (1+2+3+...+k)+(k+1)$$

$$= \frac{1}{2}\ k(k\ +1)+(k+1) \quad \text{(karena diasumsikan)}$$

$$= (k+1)(\frac{1}{2}k+1)$$

$$= \frac{1}{2}\,(k+1)(k+2)$$

Jadi, $1 + 2 + 3 + ...+ k + (k+1) = \frac{1}{2}\,(k+1)(k+2)$, itu berarti $p(k+1)$ benar sehingga $p(n)$ benar untuk setiap bilangan asli n.

Jika kedua ruas pada Contoh 1.2 tersebut dikalikan 2, diperoleh

$$2 + 4 + 6 + \ ... + 2\,n = n\,(n + 1).$$

Coba buktikan dengan menggunakan induksi matematika bahwa pernyataan ini benar untuk setiap bilangan asli n.

Contoh 1.3

Hitunglah $1 + 3 + 5 +...+ (2n -1)$.

Jawab

$1 + 3 + 5 + ...+ (2n - 1)$ sebagai deret aritmetika dengan suku pertama $a = 1$, beda $b = 2$ dan banyaknya suku adalah n serta suku terakhirnya $U_n = (2n -1)$. Maka itu, jumlahan tersebut dapat dihitung dengan rumus jumlah deret aritmetika berikut.

$$S_n = \frac{1}{2}n(a+U_n)$$

$$S_n = \frac{1}{2}n(1+2n-1)=n^2$$

Jadi, $1+3+5+...+(2n-1)=n^2$

Akan tetapi, apabila kita lupa atau belum mengerti rumus deret, hal tersebut tidak dapat kita lakukan. Kita dapat membuat dugaan dengan mencoba jumlah beberapa suku sebagai berikut.

$$
\begin{aligned}
1 &= 1\\
1 + 3 &= 4\\
1 + 3 + 5 &= 9\\
1 + 3 + 5 + 7 &= 16\\
&\text{dan seterusnya}\\
1 + 3 + 5 + \ldots + 99 &= ?
\end{aligned}
$$

Tampak bahwa jumlah-jumlah ini merupakan bilangan kuadrat sempurna. Kita pun dapat menduga bahwa

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2.$$

Akan tetapi, dugaan ini baru merupakan jawaban sementara sehingga harus dibuktikan kebenarannya. Pembuktiannya dapat dilakukan dengan induksi matematika sebagai berikut.

Misalkan, $p(n)$ menyatakan $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2$.

(I) $p(1)$ adalah $1 = 1^2$, jelas benar.

(II) Dimisalkan $p(k)$ benar untuk suatu bilangan asli k, yaitu
$1 + 3 + 5 + \ldots + (2k - 1) = k^2$ dan ditunjukkan bahwa $p(k+1)$ benar, yaitu
$1 + 3 + 5 + \ldots + (2k-1) + (2k + 1) = (k + 1)^2$.

Hal ini ditunjukkan sebagai berikut.
$1 + 3 + 5 + \ldots + (2k - 1) + (2k + 1) = k^2 + 2k + 1 = (k + 1)^2$.
Maka itu, $p(k + 1)$ benar.
Jadi, $p(n)$ benar untuk setiap bilangan asli n.

Contoh 1.4

Buktikanlah bahwa untuk setiap bilangan asli n berlaku

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Bukti

Misalkan, $p(n)$ adalah $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

(I) $p(1)$ adalah $$1^2 = \frac{1(1+1)(2.1+1)}{6}$$

$$1 = \frac{1}{6}.2.3$$

$$1 = 1$$

Jadi, $p(1)$ benar.

(II) Diasumsikan bahwa $p(k)$ benar untuk suatu bilangan asli k, yaitu $1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + k^2 = \frac{1}{6}k(k+1)(2k+1)$. Hal tersebut harus ditunjukkan bahwa $p(k + 1)$ benar, yaitu

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + k^2 + (k+1)^2 = \frac{1}{6}(k+1)(k+2)(2k+3).$$

Hal ini ditunjukkan sebagai berikut.

$$\begin{aligned}1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + k^2 + (k+1)^2 &= \frac{1}{6}k(k+1)(2k+1) + (k+1)^2 \\ &= (k+1)\left\{\frac{1}{6}k(2k+1) + (k+1)\right\} \\ &= (k+1)\left\{\frac{1}{6}(2k^2 + k + 6k + 6)\right\} \\ &= \frac{1}{6}(k+1)(2k^2 + 7k + 6) \\ &= \frac{1}{6}(k+1)(k+2)(2k+3)\end{aligned}$$

Jadi, $p(k + 1)$ benar.

Selanjutnya, dari langkah-langkah (I) dan (II), disimpulkan bahwa $p(n)$ benar untuk setiap bilangan asli n.

NOTASI Σ (SIGMA)

Jumlahan untuk bilangan-bilangan yang teratur dapat ditulis lebih singkat dengan menggunakan notasi Σ (sigma). Berikut ini konsep, prinsip, dan contoh-contoh penggunaan notasi Σ.

(1) $\sum_{k=1}^{n} k = 1+2+3+...+n$

(2) $\sum_{k=1}^{n} (2k-1) = 1+3+5+...+(2n-1)$

(3) $\sum_{k=1}^{n} ck = c\sum_{k=1}^{n} k$, dengan c suatu konstanta

(4) $\sum_{l=1}^{n} a_l + \sum_{l=1}^{n} b_l = \sum_{l=1}^{n} (a_l + b_l)$

(5) $\sum_{l=1}^{n} d = d+d+d+...+d = nd$

$|$----n suku------$|$

Contoh 1.5

(1) $\sum_{k=1}^{5} k = 1+2+3+4+5 = 15$

(2) $\sum_{i=1}^{7} 6i = 6\sum_{i=1}^{7} i = 6(1+2+3+4+5+6+7) = 168$

(3) $\sum_{t=1}^{6} 10 = 10+10+10+10+10+10 = 60$

(4) $\sum_{k=1}^{3} 3k + 2^k = 3\sum_{k=1}^{3} k + \sum_{k=1}^{3} 2^k = 3(1+2+3)+(2^1+2^2+2^3) = 32$

Contoh 1.6

Buktikan bahwa $\sum_{k=1}^{n} (3k-2) = \frac{1}{2}(3n^2-n)$ untuk setiap bilangan asli n.

Bukti

Misalkan, $p(n)$ menyatakan $\sum_{k=1}^{n} (3k-2) = \frac{1}{2}(3n^2-n)$.

(I) p(1) adalah $\sum_{k=1}^{1}(3.k-2)=\frac{1}{2}(3.1^2-1)$

$$3.1-2=\frac{1}{2}(3.1^2-1)$$

$$1=1$$

Jadi, $p(1)$ benar.

(II) Diasumsikan $p(t)$ benar untuk suatu bilangan asli t, yaitu $\sum_{k=1}^{t}(3k-2)=\frac{1}{2}(3t^2-t)$ dan harus ditunjukkan bahwa $p(t + 1)$ benar, yaitu $\sum_{k=1}^{t+1}(3k-2)=\frac{1}{2}\ 3(t+1)^2-(t+1)\ =\frac{1}{2}(3t^2+5t+2)$.

Hal ini ditunjukkan sebagai berikut.

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{t+1}(3k-2)&=\sum_{k=1}^{t}(3k-2)+3(t+1)-2\\&=\frac{1}{2}(3t^2-t)+3t+1\\&=\frac{1}{2}(3t^2-t+6t+2)\\&=\frac{1}{2}(3t^2+5t+2)\end{aligned}$$

Jadi, $p(t+1)$ benar sehingga $p(n)$ benar untuk setiap bilangan asli n.

Contoh 1.6 ini dapat dibuktikan menggunakan sifat-sifat notasi Σ sebagai berikut.

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}(3k-2)&=\sum_{k=1}^{n}3k-\sum_{k=1}^{n}2\\&=3\sum_{k=1}^{n}k-2n,\text{menggunakan Contoh 1.2, maka}\\&=3\left(\frac{1}{2}n(n+1)\right)-2n\\&=\frac{1}{2}\ 3n^2+3n-4n\\&=\frac{1}{2}\ 3n^2-n\end{aligned}$$

Ingat Contoh 1.2 bahwa $\sum_{k=1}^{n} k = 1+2+3+...+n = \frac{1}{2}n(n+1)$.

Contoh 1.7

Buktikan bahwa untuk setiap bilangan asli n, 7^n - 2^n selalu terbagi habis oleh 5.

Bukti

Misalkan $p(n)$ menyatakan $7^n - 2^n$ terbagi habis oleh 5.

(I) p(l) adalah $7^1 - 2^1$ terbagi habis oleh 5, yaitu 5 terbagi habis oleh 5.
Jadi, p(l) benar.

(II) Diasumsikan $p(k)$ benar untuk suatu bilangan asli k, yaitu 7^k - 2^k terbagi habis oleh 5. Hal tersebut harus ditunjukkan bahwa $p(k+1)$ benar, yaitu 7^{k+1} - 2^{k+1} terbagi habis oleh 5.
Hal ini ditunjukkan sebagai berikut.

$$\begin{aligned} 7^{k+1} - 2^{k+1} &= 7^k.7 - 2^k.2 \\ &= 7^k.7 - 2^k.7 + 2^k.7 - 2^k.2 \\ &= 7(7^k - 2^k) + 2^k(7-2) \\ &= 7(7^k - 2^k) + 2^k.5 \end{aligned}$$

Telah diasumsikan bahwa $(7^k - 2^k)$ terbagi habis oleh 5 sehingga $7(7^k - 2^k)$ terbagi habis oleh 5 pula. Suku $(2^k.5)$ jelas terbagi habis oleh 5 sebab mempunyai faktor 5 sehingga $7(7^k - 2^k) + 2^k.5$ terbagi habis oleh 5.
Jadi, $7^{k+1} - 2^{k+1}$ terbagi habis oleh 5. Maka itu, $p(k + 1)$ benar.

Selanjutnya, dari langkah (I) dan (II), dapat disimpulkan bahwa 7^n -2^n terbagi habis oleh 5 untuk setiap bilangan asli n.

Contoh 1.8

Banyaknya elemen himpunan S_n adalah n (suatu bilangan asli). Berapakah banyaknya semua himpunan bagian dari S_n?

Jawab

Misalkan $S_n = \{a_1, a_2, a_3, ..., a_n\}$

Untuk $S_1 = \{a_1\}$, himpunan bagian dari S_1 adalah $\varnothing$ dan $\{a_1\}$, yaitu banyaknya himpunan bagian dari S_1 adalah 2. Coba periksalah banyaknya himpunan bagian dari himpunan-himpunan berikut ini.

Banyaknya himpunan bagian dari $S_2 = \{a_1, a_2\}$ adalah 4.

Banyaknya himpunan bagian dari $S_3= \{a_1, a_2, a_3)$ adalah 8.

Banyaknya himpunan bagian dari $S_4= \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ adalah 16 dan seterusnya. Untuk melihat hal ini dengan lebih jelas, perhatikan Tabel 1.1.

Table 1.1

Banyak-nya elemen S_n	Himpunan S_n	Himpunan bagian dari S	Banyak himpunan bagian dari S_n
0	$\varnothing$	$\varnothing$	$1 = 2^0$
1	$\{a_1\}$	$\varnothing,\{a_1\}$	$2 = 2^1$
2	$\{a_1,a_2\}$	$\varnothing,\{a_1\},\{a_2\},\{a_1,a_2\}$	$4 = 2^2$
3	$\{a_1,a_2,a_3\}$	$\varnothing,\{a_1\},\{a_2\},\{a_3\},\{a_1,a_2\},\{a_1,a_3\},\{a_2,a_3\},\{a_1,a_2,a_3\}$	$8 = 2^3$
.	.	.	.
.	.	.	.
.	.	.	.
n	$\{a_1,a_2,a_3,.,a_n\}$	...	2^n

Dalam kolom terakhir dari Tabel 1.1, banyaknya himpunan bagian tersebut merupakan perpangkatan dari 2. Maka itu, kita dapat menduga bahwa banyaknya himpunan bagian dari $S_n = \{a_1, a_2, a_3, ..., a_n\}$ adalah 2^n. Akan tetapi, dugaan ini harus dibuktikan kebenarannya. Kita akan membuktikannya dengan induksi matematika.

Misalkan, $p(n)$ menyatakan bahwa banyaknya himpunan bagian dari $S_n = \{a_1, a_2, a_3, ..., a_n\}$ adalah 2^n .

(I) $p(1)$ adalah banyaknya himpunan bagian dari $S_1= \{a_1\}$ adalah 2^1. Hal ini benar sebab himpunan bagian dari S_1 adalah $\varnothing$ dan $\{a_1\}$. Jadi, p(l) benar.

(II) Diasumsikan $p(k)$ benar untuk suatu bilangan asli k, yaitu banyaknya himpunan bagian dari $S_k = \{a_1, a_2, a_3, ..., a_k\}$ adalah 2^k. Hal tersebut harus ditunjukkan bahwa $p(k + 1)$ benar, yaitu banyaknya himpunan bagian dari $S_{k+1}= \{a_1, a_2, a_3, ..., a_k, a_{k+1}\}$ adalah 2^{k+1}.

Hal ini ditunjukkan sebagai berikut.

Telah diasumsikan bahwa banyaknya himpunan bagian dari S_k adalah 2^k.

Maka itu, banyaknya himpunan bagian dari S_{k+1} adalah banyaknya himpunan bagian dari S_k ditambah dengan banyaknya himpunan bagian dari S_{k+1} yang bukan merupakan himpunan bagian dari S_k, yaitu himpunan-himpunan bagian dari S_k yang masing-masing dilengkapi dengan elemen a_{k+1}, yaitu sebanyak 2^k pula. Jadi, banyaknya himpunan bagian dari S_{k+1} adalah $2^k + 2^k = 2^{k+1}$ sehingga $p(k+1)$ benar. Selanjutnya, dari langkah-langkah (I) dan (II), dapat disimpulkan bahwa $p(n)$ benar untuk setiap bilangan asli n, yaitu banyaknya himpunan bagian dari $S_n = \{a_1, a_2, a_3, ..., a_n\}$ adalah 2^n untuk setiap bilangan asli n.

Perhatikan lagi contoh-contoh di atas. Pembuktian dengan induksi matematika harus mengikuti dua langkah, yaitu langkah (I) sebagai basis (dasar) induksi dan langkah (II) merupakan langkah induksi. Kedua langkah ini harus ditaati apabila menggunakan cara pembuktian dengan induksi matematika.

Kadang-kadang basis/dasar induksi tidak diambil $n = 1$, tetapi diambil $n = r$ untuk $r > 1$ sesuai dengan permasalahan yang dihadapi. Untuk itu, perhatikan contoh berikut.

Contoh 1.9

Buktikan bahwa $n^2 \leq 2^n$ untuk setiap bilangan asli $n \geq 4$.

Bukti

$p(n)$ adalah $n^2 \leq 2^n$.

(I) $p(4)$ adalah $4^2 \leq 2^4$ maka $p(4)$ benar.

(II) Misalkan, $p(k)$ benar untuk suatu bilangan asli $k \geq 4$, yaitu $k^2 \leq 2^k$, dan harus ditunjukkan bahwa $p(k+1)$ benar, yaitu $(k + 1)^2 \leq 2^{k+1}$.
Hal ini ditunjukkan dengan berikut ini.

$$(k+1)^2 = k^2 + 2k + 1 < 2k^2 \leq 2.2^k = 2^{k+1}$$

Jadi, $p(k+l)$ benar.

Selanjutnya, dari langkah-langkah (I) dan (II), dapat disimpulkan bahwa $n^2 \leq 2^n$ benar untuk setiap bilangan asli $n \geq 4$.

LATIHAN

Untuk memperdalam pemahaman Anda mengenai materi di atas, kerjakanlah latihan berikut!

1) Buktikan bahwa untuk setiap bilangan asli n berlaku $4+10+16+...+(6n - 2) = n(3n + 1)$.
2) Buktikan $1.2 + 2.3 + 3.4 + \ldots + n(n + 1) = \frac{1}{3}n(n + 1)(n + 2)$ untuk setiap bilangan asli n.
3) Buktikan $1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots + (2n -1)^2 = \frac{1}{3}n(4n^2 -1)$ untuk setiap bilangan asli n.
4) Buktikan bahwa untuk setiap bilangan asli n berlaku
$$\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+...+\frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}.$$
5) Buktikanlah bahwa untuk setiap bilangan asli n berlaku
$$\frac{1}{1.3}+\frac{1}{3.5}+\frac{1}{5.7}+...+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n}{2n+1}.$$
6) Buktikan bahwa untuk setiap bilangan asli n berlaku
$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2 .$$
7) Buktikan bahwa
   a) $n^2 > n + 1$, untuk setiap bilangan bulat $n \geq 2$,
   b) $2^n > n^3$, untuk setiap bilangan bulat $n > 9$.
8) Buktikan bahwa untuk setiap bilangan asli n berlaku
   a) $11^n - 4^n$ terbagi habis oleh 7,
   b) $n^3 - 4n + 6$ terbagi habis oleh 3.

Petunjuk Jawaban Latihan

Apabila Anda menemui kesulitan dalam mengerjakan soal-soal latihan tersebut, Anda dapat mengikuti petunjuk/rambu-rambu penyelesaiannya sebagai berikut.

1) Misalkan $p(n)$ adalah $4 + 10 + 16 + ... + (6n-2) = n(3n+1)$.

   (I) $p(1)$ adalah $4 = 1\,(3.1 + 1)$.
   Jadi, $p(1)$ jelas benar.

   (II) Diasumsikan bahwa $p(k)$ benar untuk suatu bilangan asli k, yaitu $4 + 10 + 16 + ... + (6k - 2) = k(3k + 1)$. Hal tersebut harus ditunjukkan bahwa $p(k + 1)$ benar, yaitu $4 + 10 + 16 + ... + (6k - 2) + (6k + 4) = (k + 1)(3k+4)$.
   Hal ini ditunjukkan sebagai berikut.

$$\begin{aligned} 4 + 10 + 16 + ... + (6k - 2) + (6k+4) &= k(3k + 1) + (6k + 4) \\ &= 3k^2 + 7k + 4 \\ &= (k + 1)(3k + 4) \end{aligned}$$

   Jadi, $p(k+1)$ benar.
   Dari langkah-langkah (I) dan (II), disimpulkan bahwa $p(n)$ benar untuk setiap bilangan asli n.

2) Misalkan, kesamaan tersebut dengan $p(n)$, yaitu

$$1.2 + 2.3 + 3.4 + \dots + n(n + 1) = \tfrac{1}{3}\, n(n + 1)(n + 2).$$

   (I) Periksalah bahwa $p(1)$ benar.

   (II) Asumsikanlah bahwa untuk suatu bilangan asli n, $p(n)$ benar, yaitu

$$1.2 + 2.3 + 3.4 + \dots + n(n + 1) = \tfrac{1}{3}\, n(n + 1)(n + 2)$$

   dan tunjukkanlah bahwa $p(n + 1)$ benar, yaitu

$$1.2 + 2.3 + 3.4 + \dots + n(n + 1) + (n + 1)(n + 2) = \frac{1}{3}(n + 1)(n + 2)(n + 3).$$

   Hal ini ditunjukkan sebagai berikut.

$$\begin{aligned} &1.2 + 2.3 + 3.4 + ... + n(n + 1) + (n + 1)(n + 2) \\ &\qquad = \frac{1}{3} n(n + 1)(n + 2) + (n + 1)(n + 2) \\ &\qquad = \frac{1}{3}(n + 1)(n + 2)(n + 3) \end{aligned}$$

   Jadi, $p(n+1)$ benar untuk suatu bilangan asli n.
   Selanjutnya, dari langkah-langkah (I) dan (II), disimpulkan bahwa $p(n)$ benar untuk setiap bilangan asli n.

   PERHATIAN
   Pada contoh-contoh dalam uraian materi, digunakan simbol k untuk menyatakan suatu bilangan asli tertentu. Pada penyelesaian ini,

digunakan simbol n. Anda dapat menggunakan simbol lainnya untuk menunjuk suatu bilangan asli tertentu.

3) Misalkan, kesamaan itu dengan $p(n)$, yaitu

$$1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots + (2n-1)^2 = \tfrac{1}{3}n(4n^2 - 1).$$

(I) Periksalah bahwa $p(1)$ benar.

(II) Asumsikanlah bahwa $p(n)$ benar untuk suatu bilangan asli n, yaitu

$$1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots + (2n-1)^2 = \tfrac{1}{3}n(4n^2 - 1).$$

Tunjukkanlah bahwa $p(n+1)$ benar, yaitu

$$1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots + (2n-1)^2 + (2n+1)^2 = \frac{1}{3}(n+1)(4n^2 + 8n + 3).$$

Tunjukkanlah kebenaran kesamaan ini, yaitu $p(n+1)$ benar untuk suatu bilangan asli n. Selanjutnya, tariklah kesimpulan bahwa $p(n)$ benar untuk setiap bilangan asli n.

4) Misalkanlah kesamaan tersebut dengan $p(n)$, yaitu

$$\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}.$$

(I) Periksalah bahwa $p(1)$ benar.

(II) Asumsikanlah bahwa $p(n)$ benar untuk suatu bilangan asli n, yaitu

$$\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}.$$

Selanjutnya tunjukkanlah bahwa $p(n+1)$ benar, yaitu

$$\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n+1}{n+2}.$$

Hal ini ditunjukkan sebagai berikut.

$$\begin{aligned}\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} &= \frac{n}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} \\ &= \frac{n^2 + 2n + 1}{(n+1)(n+2)} \\ &= \frac{n+1}{n+2}\end{aligned}$$

Ini telah menunjukkan bahwa $p(n+1)$ benar untuk suatu bilangan asli n. Selanjutnya, dari dua langkah tersebut, disimpulkan bahwa $p(n)$ benar untuk setiap bilangan asli n.

5) Misalkan, kesamaan itu dengan $p(n)$, yaitu

$$\frac{1}{1.3}+\frac{1}{3.5}+\frac{1}{5.7}+...+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{n}{2n+1}.$$

(I) Tunjukkanlah bahwa $p(1)$ benar.

(II) Asumsikanlah bahwa $p(n)$ benar, yaitu

$$\frac{1}{1.3}+\frac{1}{3.5}+\frac{1}{5.7}+...+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{n}{2n+1}.$$

Tunjukkanlah bahwa $p(n+1)$ benar, yaitu

$$\frac{1}{1.3}+\frac{1}{3.5}+\frac{1}{5.7}+...+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}+\frac{1}{(2n+1)(2n+3)}=\frac{n+1}{2n+3}.$$

Cobalah membuktikan kebenaran kesamaan terakhir ini. Selanjutnya, berdasarkan dua langkah tersebut, Anda dapat menyimpulkan bahwa $p(n)$ benar untuk setiap bilangan asli n.

6) Kita akan membuktikan bahwa $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2$. Pada *Contoh.1*, kita telah mengenal bahwa $\sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{1}{2}n(n+1)$.

Maka itu, kita harus menunjukkan bahwa

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2.$$

Misalkan kesamaan terakhir ini dinyatakan sebagai $p(n)$.

(I) Tunjukkanlah bahwa $p(1)$ benar.

(II) Asumsikanlah bahwa $p(n)$ benar untuk suatu bilangan asli n dan tunjukkanlah bahwa $p(n+1)$ benar, yaitu

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^3 = \frac{1}{4}(n+1)^2(n+2)^2.$$

Kesamaan terakhir ini ditunjukkan sebagai berikut.

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^3 = \sum_{k=1}^{n} k^3 + (n+1)^3$$

$$= \frac{1}{4} n^2 (n+1)^2 + (n+1)^3$$

$$= \frac{1}{4} (n+1)^2 \, (n^2 + 4(n+1))$$

$$= \frac{1}{4} (n+1)^2 (n+2)^2$$

Hal ini telah menunjukkan bahwa $p(n + 1)$ benar untuk suatu bilangan asli n. Selanjutnya, Anda dapat menyimpulkan bahwa $p(n)$ benar untuk setiap bilangan asli n berdasarkan dua langkah di atas.

7) a) Kita harus membuktikan bahwa $n^2 > n + 1$ untuk setiap bilangan bulat $n \geq 2$ maka sebagai dasar induksi adalah $n = 2$. Misalkan, ketaksamaan ini dengan $p(n)$.

(I) Tunjukkanlah bahwa $p(2)$ benar.

(II) Asumsikanlah bahwa $p(n)$ benar untuk suatu bilangan asli $n \geq 2$ dan Anda harus menunjukkan bahwa $p(n+l)$ benar, yaitu

$$(n + 1)^2 > n + 2.$$

Coba tunjukkanlah ketaksamaan terakhir ini sehingga $p(n+1)$ benar untuk suatu bilangan asli $n \geq 2$. Selanjutnya, berdasarkan dua langkah induksi tersebut, dapat disimpulkan bahwa $p(n)$ benar untuk setiap bilangan asli $n \geq 2$.

b) Kita harus membuktikan bahwa $2^n > n^3$ untuk setiap bilangan bulat $n > 9$ maka sebagai basis induksi adalah $n = 10$. Misalkan, ketaksamaan ini dengan $p(n)$.

(I) Tunjukkanlah kebenaran dari $p(10)$.

(II) Asumsikanlah bahwa $p(n)$ benar untuk suatu bilangan asli $n > 9$ dan tunjukkanlah bahwa $p\ (n + 1)$ benar, yaitu $2^{n+1} > (n + l\ )^3$.

Hal ini ditunjukkan sebagai berikut.

$$2^{n+1} = 2.2^n > (1 + \frac{1}{9})^3.2^n > (1 + \frac{1}{n})^3.\ n^3 > (n+1)^3$$

Jadi, $p(n+l)$ benar.

Selanjutnya, berdasarkan dua langkah tersebut, dapat disimpulkan bahwa $p(n)$ benar untuk setiap bilangan asli $n > 9$.

8) a) Kita akan membuktikan bahwa untuk setiap bilangan asli n berlaku $11^n - 4^n$ terbagi habis oleh 7.

Dimisalkan bahwa $p(n)$ menyatakan $11^n - 4^n$ terbagi habis oleh 7.

(I) Tunjukkanlah bahwa $p(\mathrm{l})$ benar.

(II) Asumsikanlah bahwa $p(k)$ benar untuk suatu bilangan asli k, yaitu $11^k - 4^k$ terbagi habis oleh 7.

Kita harus menunjukkan bahwa $p(k + 1)$ benar, yaitu

$\mathrm{l\,l}^{k+1} - 4^{k+1}$ terbagi habis oleh 7.

Kebenaran pernyataan ini ditunjukkan sebagai berikut.

$$\begin{aligned} 11^{k+1} - 4^{k+1} &= 11^k.11 - 4^k.\ 4 \\ &= 11^k.\ 11 - 11^k.4 + 11^k.4 - 4^k.\ 4 \\ &= 11^k.7 + 4(11^k - 4^k) \end{aligned}$$

Pada kesamaan terakhir ini, berilah alasan bahwa $p(k + 1)$ benar. Maka itu, Anda dapat menyimpulkan bahwa $p(n)$ benar untuk setiap bilangan asli n.

b) Kita akan membuktikan bahwa untuk setiap bilangan asli n berlaku $n^3 - 4n + 6$ terbagi habis oleh 3.

Misalkan, $p(n)$ adalah $n^3 - 4n + 6$ terbagi habis oleh 3.

(I) Mudah sekali untuk menunjukkan bahwa $p(1)$ benar.

(II) Asumsikan bahwa $p(k)$ benar, yaitu $k^3 - 4k + 6$ terbagi habis oleh 3.

Tunjukkanlah bahwa $p(k+1)$ benar, yaitu $(k+\mathrm{l})^3 - 4(k+\mathrm{l}) + 6$ terbagi habis oleh 3.

Hal ini ditunjukkan sebagai berikut.

$$(k+\mathrm{l})^3 - 4(k+1) + 6 = (k^3 - 4k + 6) + 3(k^2 + k + 2)$$

Dengan memperhatikan kesamaan terakhir ini, asumsi yang telah diambil itu mudah untuk memberi alasan bahwa $p(k+\mathrm{l})$ benar. Maka itu, kita dapat menyimpulkan bahwa $p(n)$ benar untuk setiap bilangan asli n.

RANGKUMAN

Induksi matematika merupakan salah satu metode/cara pembuktian yang absah dalam matematika. Meskipun namanya induksi matematika, metode ini merupakan penalaran deduktif. Pembuktian dengan induksi matematika berkenaan dengan pembuktian pada pernyataan-pernyataan yang semestanya adalah himpunan bilangan bulat atau lebih khusus himpunan semua bilangan asli.

Misalkan, pernyataan $p(n)$ adalah suatu proposisi yang berlaku untuk setiap bilangan asli n. Pembuktian kebenaran dari pernyataan ini dengan menggunakan induksi matematika mengikuti langkah-langkah berikut.

Langkah (I) : ditunjukkan bahwa $p(l)$ benar.

Langkah (II): diasumsikan bahwa $p(k)$ benar untuk suatu bilangan asli $k > 1$ dan ditunjukkan bahwa $p(k + 1)$ benar.

Apabila kedua langkah tersebut berhasil, kita dapat menyimpulkan bahwa $p(n)$ benar untuk setiap bilangan asli n.

Langkah (I) disebut *basis* (*dasar*) *induksi* dan langkah (II) disebut *langkah induksi*.

Basis induksi tidak mesti diambil $n = 1$, tetapi diambil sesuai dengan permasalahan yang dihadapi atau pernyataan yang ingin dibuktikan. Misalkan, akan dibuktikan bahwa $p(n)$ berlaku untuk setiap bilangan asli $n \geq t$. Maka itu, langkah-langkah pembuktiannya dengan induksi matematika sebagai berikut.

Langkah (I) : ditunjukkan bahwa $p(t)$ benar.

Langkah (II): diasumsikan bahwa $p(k)$ benar untuk suatu bilangan asli $k \geq t$ dan ditunjukkan bahwa $p(k + 1)$ benar.

Apabila kedua langkah ini berhasil, kita dapat menyimpulkan bahwa $p(n)$ benar untuk setiap bilangan asli $n \geq t$.

TES FORMATIF 1

Pilihlah satu jawaban yang paling tepat!

1) Misalkan, kita akan membuktikan pernyataan "$3n < n^2 - 1$ untuk setiap n pada suatu himpunan bagian dari himpunan semua bilangan asli" dengan metode induksi matematika. Basis induksi yang diambil adalah $n = \ldots.$
   A. 1
   B. 2
   C. 3
   D. 4

2) Basis induksi dalam membuktikan bahwa $p(n)$, yaitu $n! > n^2$ untuk setiap n dari suatu himpunan bagian dari himpunan semua bilangan asli adalah ….
   A. $p(l)$
   B. $p(2)$
   C. $p(3)$
   D. $p(4)$

3) Suku ke-n dari deret 4 + 10 + 16 + 22 + ... adalah ….
A. 4n
B. 5n – 1
C. 6n – 2
D. 8n – 4

4) Jumlah n suku pertama dari deret 4 + 10 + 16 + 22 + ... adalah ….
A. $n(3n + 1) + 4$
B. $2n(n – 2) + 4$
C. $3n(n – 1) + 4$
D. $n(2n + 2) + 4$

5) Misalkan, $p(n)$ adalah $\sum_{k=1}^{n}(2k-1)^2 = \frac{1}{3}n(4n^2-1)$ untuk setiap bilangan asli n maka $p(n + 1)$ adalah ….
A. $\sum_{k=1}^{n}(2k+1)^2 = \frac{1}{3}(n+1)(4n^2+8n+3)$
B. $\sum_{k=1}^{n+1}(2k-1)^2 = \frac{1}{3}(n+1)(4n^2+8n+3)$
C. $\sum_{k=1}^{n+1}(2k-1)^2 = \frac{1}{3}(n+1)(4n^2+3)$
D. $\sum_{k=1}^{n+1}(2k+1)^2 = \frac{1}{3}(n+1)(4n^2+3)$

6) Apabila $p(n)$ adalah $(n+1)! > n^2 + 1$ maka $p(n + 1)$ adalah ….
A. $(n + 2)! > n^2 + 2n + 2$
B. $(n + 2)! > n^2 + 2$
C. $n!(n + 2) > (n + 1)^2 + 1$
D. $(n + 1)!(n + 2) > n^2 + 2$

7) Jika $t \neq 1$, jumlah n suku pertama dari deret $a + at + at^2 + \ldots$ adalah ….
A. $\dfrac{a(t^n-1)}{t-1}$
B. $\dfrac{a(1+t^n)}{1+t}$

C. $\dfrac{a(1-t^{n+1})}{1-t}$

D. $\dfrac{a(1+t^{n+1})}{1-t}$

8) Apabila $p(n)$ adalah $\sum_{i=1}^{n}(2i-1)^2 = \frac{1}{3}n(4n^2-1)$ maka $p(1)$ adalah ….
   A. 2 = 2
   B. 1 = 1
   C. $1 = \dfrac{3}{2}$
   D. $2 = \dfrac{3}{2}$

9) Jumlah n suku pertama dari deret 3 + 5 + 7 + … adalah ….
   A. $(n+1)^2 + 3$
   B. $n^2 - n + 3$
   C. $n(n+1) + 3$
   D. $n(n+2) + 3$

10) Apabila $p(n)$ adalah $\sum_{t=1}^{n} t^3 = \sum_{i=l}^{n}(i+1)^2$ maka $p(n + 1)$ adalah ….
   A. $\sum_{t=1}^{n}(t+1)^3 = \sum_{i=l}^{n}(i+2)^2$
   B. $\sum_{t=1}^{n+1} t^3 = \sum_{i=l}^{n+1}(i+1)^2$
   C. $(t+1)\sum_{t=1}^{n} t^3 = (i+2)\sum_{i=l}^{n}(i+1)^2$
   D. $\sum_{t=1}^{n} t^3 + 1 = \sum_{i=l}^{n}(i+1)^2 + 1$

Cocokkanlah jawaban Anda dengan Kunci Jawaban Tes Formatif 1 yang terdapat di bagian akhir modul ini. Hitunglah jawaban yang benar. Kemudian, gunakan rumus berikut untuk mengetahui tingkat penguasaan Anda terhadap materi Kegiatan Belajar 1.

$$\text{Tingkat penguasaan} = \frac{\text{Jumlah Jawaban yang Benar}}{\text{Jumlah Soal}} \times 100\%$$

Arti tingkat penguasaan: 90 - 100% = baik sekali
80 - 89% = baik
70 - 79% = cukup
< 70% = kurang

Apabila mencapai tingkat penguasaan 80% atau lebih, Anda dapat meneruskan dengan Kegiatan Belajar 2. **Bagus!** Jika masih di bawah 80%, Anda harus mengulangi materi Kegiatan Belajar 1, terutama bagian yang belum dikuasai.

KEGIATAN BELAJAR 2

Teorema Binomial

Kita akan mengingat kembali pengertian kombinasi dari sejumlah r objek yang diambil dari n objek yang telah dipelajari di SMA dan mata kuliah Teori Peluang. Banyaknya kombinasi dari r objek yang diambil dari n objek ($r \leq n$) sebagai berikut.

$$C(n,\ r) = \binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)!r!}$$

Contoh 1.10

1. Misalkan ada lima objek, yaitu a, b, c, d, dan e. Apabila dari lima objek ini diambil tiga objek, banyaknya cara pengambilan tiga objek tersebut sebagai berikut.

   $$\binom{5}{3} = \frac{5!}{2!.3!} = \frac{1.2.3.4.5}{(1.2)(1.2.3)} = 10 \text{ cara}$$

   Sepuluh cara pengambilan itu adalah *abc, abd, abe, acd, ace, ade, bcd, bce, bde,* dan *cde*.
2. Misalkan dalam suatu kotak terdapat tiga kelereng merah dan empat kelereng putih. Apabila kita mengambil tiga kelereng merah dari dalam kotak yang hanya berisi tiga kelereng merah, banyaknya cara pengambilan sebagai berikut.

   $$\binom{3}{3} = \frac{3!}{0!.3!} = \frac{1.2.3}{1.1.2.3} = 1 \text{ cara}$$

   Akan tetapi, apabila kita mengambil tiga kelereng dari dalam kotak itu, banyaknya cara pengambilan sebagai berikut.

   $$\binom{7}{3} = \frac{7!}{4!.3!} = \frac{7.6.5}{1.2.3} = 35 \text{ cara}$$

   Jika kita mengambil empat kelereng dari dalam kotak tersebut, banyaknya cara pengambilan sebagai berikut.

   $$\binom{7}{4} = \frac{7!}{3!.4!} = \frac{7.6.5}{1.2.3} = 35 \text{ cara}$$

3. Misalkan ada tiga kotak yang masing-masing berisi satu bola merah dan satu bola putih. Dari tiap-tiap kotak, diambil satu bola sehingga terambil tiga bola.
   Banyaknya cara pengambilan tiga bola tersebut agar terambil bola merah semua ada $\binom{3}{3} = 1$ cara.
   Banyaknya cara pengambilan tiga bola tersebut agar terambil dua bola merah ada $\binom{3}{2} = 3$ cara.
   Banyaknya cara pengambilan tiga bola itu agar terambil satu bola merah ada $\binom{3}{1} = 3$ cara.
   Banyaknya cara pengambilan tiga bola itu agar tak terambil bola merah ada $\binom{3}{0} = 1$ cara.

Contoh terakhir ini akan digunakan untuk menyatakan suku banyak yang merupakan penjabaran dari $(m + p)^3$. Perpangkatan ini dapat dinyatakan sebagai perkalian berulang dengan tiga faktor sama berikut.

$$(m + p)(m + p)(m + p) = mmm + mmp + mpm + pmm + ppm + pmp + mpp + ppp$$

Setiap suku dari ruas kanan kesamaan ini terdiri atas tiga faktor dan masing-masing faktor berturut-turut diambil dari faktor pertama, faktor kedua, dan faktor ketiga dari ruas pertama. Jika diperhatikan Contoh 1.10, diperoleh

banyaknya suku dengan tiga m adalah $\binom{3}{3} = 1$,

banyaknya suku dengan dua m ada $\binom{3}{2} = 3$,

banyaknya suku dengan satu m ada $\binom{3}{1} = 3$, dan banyaknya suku tanpa m ada $\binom{3}{0} = 1$.

Pada kesamaan terakhir itu, jika suku-suku sejenisnya dijumlahkan, akan diperoleh $(m + p)^3 = m^3 + 3m^2p + 3mp^2 + p^3$.

Koefisien-koefisien suku-suku dari ruas kanan dari kesamaan terakhir ini dapat dinyatakan dengan kombinasi-kombinasi banyaknya m dalam tiap sukunya sehingga kesamaan itu dapat ditulis sebagai berikut.

$$(p+m)^3 = \binom{3}{0}p^3 + \binom{3}{1}mp^2 + \binom{3}{2}m^2p + \binom{3}{3}m^3$$

Dengan argumentasi yang mirip dengan ilustrasi di atas, kita dapat menuliskan kesamaan-kesamaan berikut ini. Coba periksalah kebenarannya.

$$(a+x)^1 = \binom{1}{0}a + \binom{1}{1}x$$

$$(a+x)^2 = \binom{2}{0}a^2 + \binom{2}{1}ax + \binom{2}{2}x^2$$

$$(a+x)^3 = \binom{3}{0}a^3 + \binom{3}{1}a^2x + \binom{3}{2}ax^2 + \binom{3}{3}x^3$$

$$(a+x)^4 = \binom{4}{0}a^4 + \binom{4}{1}a^3x + \binom{4}{2}a^2x^2 + \binom{4}{3}ax^3 + \binom{4}{4}x^4$$

$$\vdots$$

$$(a+x)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}x + \binom{n}{2}a^{n-2}x^2 + \ldots + \binom{n}{k}a^{n-k}x^k + \ldots + \binom{n}{n}x^n$$

Kesamaan-kesamaan tersebut baru merupakan dugaan karena kesamaan-kesamaan itu, khususnya kesamaan terakhir, diperoleh dengan penalaran induktif. Maka itu, kesamaan tersebut perlu dibuktikan kebenarannya. Kita akan membuktikan kebenaran kesamaan tersebut, tetapi kita perlu beberapa persiapan berikut ini.

Dari rumus kombinasi di atas, diperoleh berikut ini.

$$C(n,r) = \binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)!r!}$$

Kita dapat memahami bahwa

$$\binom{n}{n-r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}\ .$$

Jadi, $\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$.

Teorema 1.1

Jika $r \le n$ maka $\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$.

Teorema ini sering disebut **sifat simetrik** dari koefisien binomial. Sifat ini membantu kita untuk menghitung lebih mudah nilai suatu kombinasi.

Contoh 1.11

1) $\binom{20}{18} = \binom{20}{2} = \frac{20.19}{1.2} = 190$

2) $\binom{30}{27} = \binom{30}{3} = \frac{30.29.28}{1.2.3} = 4060$

Teorema 1.2

Jika k dan r bilangan-bilangan asli dengan $k > r$ maka

$$\binom{k}{r-1} + \binom{k}{r} = \binom{k+1}{r}\ .$$

Bukti: $\binom{k}{r-1} + \binom{k}{r} = \frac{k!}{(k-r+1)!(r-1)!} + \frac{k!}{(k-r)!r!}$

$$= \frac{k!r + k!(k-r+1)}{(k+1-r)!r!}$$

$$= \frac{k!(r+k-r+1)}{(k+1-r)!r!}$$

$$= \frac{k!(k+1)}{(k+1-r)!r!} = \frac{(k+1)!}{(k+1-r)!r!}$$

$$\binom{k}{r-1} + \binom{k}{r} = \binom{k+1}{r}$$

Sekarang, kita siap untuk membuktikan kebenaran penjabaran suku dua berpangkat n di atas dengan mengambil a = 1 dan x = a yang selanjutnya disebut teorema binomial.

Teorema 1.3 (teorema binomial)

$$(1+a)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1}a + \binom{n}{2}a^2 + \binom{n}{3}a^3 + ... + \binom{n}{k}a^k + ... + \binom{n}{n}a^n \text{ untuk}$$

setiap bilangan asli n.

Bukti

Kita buktikan dengan induksi matematika.

(I) Untuk n = l maka $(1+a)^1 = \binom{1}{0} + \binom{1}{1}a = 1 + a$, benar.

(II) Diasumsikan bahwa pernyataan benar untuk $n = k$, yaitu

$$(1+a)^k = \binom{k}{0} + \binom{k}{1}a + \binom{k}{2}a^2 + ... + \binom{k}{r}a^r + ... + \binom{k}{k}a^k.$$

Selanjutnya, akan ditunjukkan benar untuk $n = k + 1$.

$$
\begin{aligned}
(1+a)^{k+1} &= (1+a)^k(1+a) \\
&= \left[\binom{k}{0}+\binom{k}{1}a+\binom{k}{2}a^2+....+\binom{k}{k}a^k\right](1+a) \\
&= \binom{k}{0}+\left[\binom{k}{0}+\binom{k}{1}\right]a+\left[\binom{k}{1}+\binom{k}{2}\right]a^2+....+\left[\binom{k}{k-1}+\binom{k}{k}\right]a^k+\binom{k}{k}a^{k+1} \\
&= \binom{k+1}{0}+\binom{k+1}{1}a+\binom{k+1}{2}a^2+....+\binom{k+1}{k}a^k+\binom{k+1}{k+1}a^{k+1}
\end{aligned}
$$

Dari langkah-langkah (I) dan (II), dapat disimpulkan bahwa teorema terbukti benar untuk setiap bilangan asli *n*.

Koefisien-koefisien *a* pada ruas kanan pada Teorema 1.3 disebut *koefisien binomial*.

Contoh 1.12

1) Koefisien x^9 dari penjabaran $(1 + x)^{12}$ adalah $\binom{12}{9} = \frac{12.11.10}{1.2.3} = 660$.
2) Koefisien x^8dari uraian $(x + 1)^{11}$ adalah $\binom{11}{3} = \frac{11.10.9}{1.2.3} = 165$.

Apabila pada teorema binomial tersebut a = 1, diperoleh kesamaan berikut.

$$
\begin{aligned}
(1+1)^n &= \binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\binom{n}{3}+...+\binom{n}{k}+...+\binom{n}{n} \\
2^n &= \binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\binom{n}{3}+...+\binom{n}{k}+...+\binom{n}{n}
\end{aligned}
$$

Kesamaan terakhir ini dinyatakan sebagai teorema berikut.

Teorema 1.4

Jika *n* suatu bilangan asli maka

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\binom{n}{3}+...+\binom{n}{k}+...+\binom{n}{n} = 2^n .$$

Selanjutnya, perhatikan penurunan rumus berikut.

$$\begin{aligned}\binom{n}{k}\binom{k}{m} &= \frac{n!}{(n-k)!k!}.\frac{k!}{(k-m)!m!}\\ &= \frac{n!}{(n-m)!m!}.\frac{(n-m)!}{(n-m-k+m)!(k-m)!}\\ &= \binom{n}{m}\binom{n-m}{k-m}\end{aligned}$$

Rumus yang diperoleh ini dinyatakan sebagai teorema berikut.

Teorema 1.5

Jika n, m, dan k bilangan-bilangan asli dengan $n > k > m$ maka

$$\binom{n}{k}\binom{k}{m} = \binom{n}{m}\binom{n-m}{k-m}.$$

Untuk memperjelas makna dari teorema ini, perhatikanlah contoh berikut.

Contoh 1.13

Suatu perkumpulan terdiri atas 15 orang. Akan dibentuk suatu pengurus dari perkumpulan tersebut yang terdiri atas lima orang dan dua orang di antaranya sebagai pengurus inti. Maka itu, banyaknya pilihan pengurus itu sebagai berikut.

$$\binom{15}{5}\binom{5}{2} = \frac{15.14.13.12.11}{1.2.3.4.5}.\frac{5.4}{1.2} = 30030$$

Pemilihan tersebut dapat pula dilakukan dengan memilih dua orang pengurus inti dari 15 orang. Selanjutnya, untuk melengkapi pengurus itu, dipilih tiga orang dari 13 orang (yang dua orang telah terpilih sebagai pengurus inti). Maka itu, banyaknya pilihan pengurus ini sebagai berikut.

$$\binom{15}{2}\binom{13}{3} = \frac{15.14}{1.2}.\frac{13.12.11}{1.2.3} = 30030$$

Tampak di sini bahwa $\binom{15}{2}\binom{5}{2} = \binom{15}{2}\binom{13}{3}$

Pada Teorema 1.5, apabila $m = 1$, diperoleh

$$k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}.$$

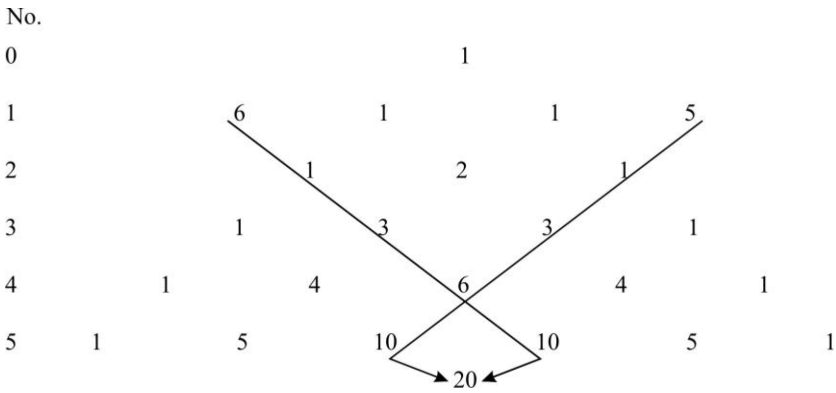
Hubungan ini dinyatakan sebagai teorema berikut.

Teorema 1.6

Jika n dan k bilangan-bilangan asli dengan $n > k$, maka

$$k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}.$$

Koefisien-koefisien binomial pada teorema binomial di atas dapat kita susun secara rekursif, seperti tampak pada Gambar 1.1, dan sering disebut segitiga Pascal sebagai berikut.

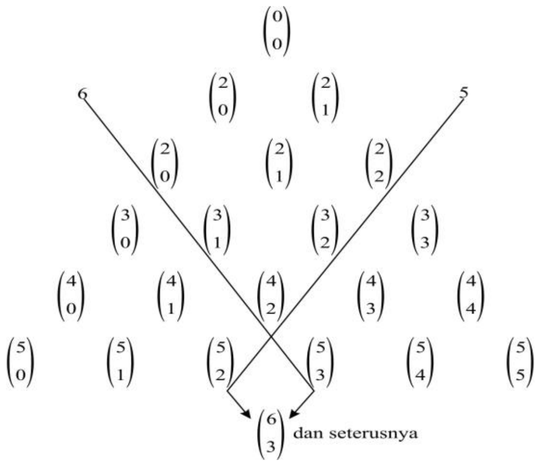


Gambar 1.1

Bilangan-bilangan pada segitiga Pascal tersebut dapat dibangun tanpa proses rekursif dengan notasi kombinatorik, seperti tampak pada Gambar 1.2.

Perhatikan anak panah 5 pada Gambar 1.1 dan Gambar 1.2. Anak panah 5 itu menunjukkan berikut ini.

1+3+6+ 10 = 20 atau $\binom{2}{2}+\binom{3}{2}+\binom{4}{2}+\binom{5}{2}=\binom{6}{3}$



Gambar 1.2

Fakta ini secara umum dapat dituliskan sebagai berikut.

$$\binom{k}{k}+\binom{k+1}{k}+\binom{k+2}{k}+\binom{k+3}{k}+\ldots+\binom{k+r}{k}=\binom{k+r+1}{k+1}$$

Anak panah 6 pada Gambar 1.1 dan Gambar 1.2 berturut-turut menunjukkan sebagai berikut.

1+3+6+ 10=20 atau $\binom{2}{0}+\binom{3}{1}+\binom{4}{2}+\binom{5}{3}=\binom{6}{3}$

Fakta ini secara umum dapat dinyatakan sebagai berikut.

$$\binom{k}{0}+\binom{k+1}{1}+\binom{k+2}{2}+\binom{k+3}{3}+\ldots+\binom{k+r}{r}=\binom{k+r+1}{r}$$

Selanjutnya, dua fakta ini dinyatakan sebagai teorema berikut.

Teorema 1.7

Jika n dan k bilangan-bilangan asli dengan $n \leq k$ maka

a) $\binom{k}{0}+\binom{k+1}{1}+\binom{k+2}{2}+\binom{k+3}{3}+...+\binom{k+r}{r}=\binom{k+r+1}{r}$

b) $\binom{k}{k}+\binom{k+1}{k}+\binom{k+2}{k}+\binom{k+3}{k}+...+\binom{k+r}{k}=\binom{k+r+1}{k+1}$.

Buktikanlah Teorema 1.7 tersebut sebagai latihan (gunakan induksi matematika).

Contoh 1.14

Buktikanlah bahwa 1.2.3 + 2.3.4 + 3.4.5 + ... + (n-2)(n-1)n = $3!\binom{n+3}{4}$.

Jawab

$$(k-2)(k-1)k=\frac{k!}{(k-3)!}=\frac{3!k!}{(k-3)!3!}=3!\binom{k}{3}$$

Jumlahan pada ruas kiri dalam soal tersebut dapat dinyatakan sebagai berikut.

$$3!\binom{3}{3}+3!\binom{4}{3}+3!\binom{5}{3}+....+3!\binom{n}{3}=3!\left[\binom{3}{3}+\binom{4}{3}+\binom{5}{3}+....+\binom{n}{3}\right]$$

$$=3!\binom{n+1}{4}, \text{sesuai Teorema 1.7b di atas}$$

Contoh 1.15

Buktikanlah $1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + ... + n^2 = 2\binom{n+1}{3}+\binom{n+1}{2}$.

Jawab

Perhatikan bahwa k^2 dapat ditulis sebagai $k^2 = k(k - 1) + k$ sehingga ruas kiri dari soal tersebut dapat ditulis sebagai berikut.

$$(1.0 + 1) + (2.1 + 2) + (3.2 + 3) + (4.3 + 4) + ... + (n(n - 1) + n)$$
$$= (2.1 + 3.2 + 4.3 + ... + n(n - 1)) + (1 + 2 + 3 + 4 + ... + n)$$
$$= ((2\binom{2}{2} + 2\binom{3}{2} + 2\binom{4}{2} + ... + 2\binom{n}{2}) + (\binom{1}{1} + \binom{2}{1} + \binom{3}{2} + ... + \binom{n}{1}))$$
$$= 2\binom{n+1}{3} + \binom{n+1}{2}$$

Contoh 1.16

Buktikanlah bahwa $\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + ... = \binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \binom{n}{5} + ... = 2^{n-1}$.

Jawab

Pada teorema binomial di atas, jika $a = 1$ maka diperoleh berikut ini

$$\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \binom{n}{3} + ... + (-1)^k \binom{n}{\mathrm{k}} + ... + (-1)^n \binom{n}{\mathrm{n}} = (1-1)^n$$
$$\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \binom{n}{3} + ... + (-1)^k \binom{n}{\mathrm{k}} + ... + (-1)^n \binom{n}{\mathrm{n}} = 0$$
$$\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + ... = \binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \binom{n}{5} + ...$$

Selanjutnya, mengingat Teorema 1.4, diperoleh berikut ini.

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + ... = \binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \binom{n}{5} + ... = 2^{n-1}$$

LATIHAN

Untuk memperdalam pemahaman Anda mengenai materi di atas, kerjakanlah latihan berikut!

1) Tunjukkanlah bahwa 1 + 2 + 3 + 4 + … + n = $\binom{n+1}{2}$.

2) Buktikanlah bahwa $n\binom{n-1}{k} = (k+1)\binom{n}{k+1}$.

3) Buktikan bahwa $\binom{n}{1} + 2\binom{n}{2} + 3\binom{n}{3} + ... + n\binom{n}{n} = n2^{n-1}$.

4) Hitunglah $\sum_{k=1}^{n} 12(k-1)k(k+1)$.

5) Buktikanlah bahwa $\binom{n}{0} + 2\binom{n}{1} + 2^2\binom{n}{2} + ... + 2^n\binom{n}{n} = 3^n$.

6) Hitunglah $\binom{n}{0} + 2\binom{n}{1} + \binom{n}{2} + 2\binom{n}{3} + \binom{n}{4} + ...$

7) Hitunglah deret berikut ini yang hasilnya dinyatakan dalam notasi kombinasi.

   1.2 + 2.3 + 3.4 + 4.5 +...+ $n(n + 1)$

8) Hitunglah $\sum_{k=1}^{n} (-1)^k k\binom{n}{k}$.

Petunjuk Jawaban Latihan

1) Pada Kegiatan Belajar 1 Contoh 1.1, jumlahan itu adalah

   $$1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{1}{2}n(n+1).$$

   Ruas kanan dari kesamaan ini, jika dinyatakan dalam notasi kombinasi, adalah $\binom{n+1}{2}$.

2) $n\binom{n-1}{k} = (k+1)\binom{n}{k+1}$ sama dengan Teorema 1.4.

3) Teorema binomial diderivatifkan ke a.

$$(1+a)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1}a + \binom{n}{2}a^2 + \binom{n}{3}a^3 + \ldots + \binom{n}{k}a^k + \ldots + \binom{n}{n}a^n$$

$$n(1+a)^{n-1} = \binom{n}{1} + 2\binom{n}{2}a + 3\binom{n}{3}a^2 + \ldots + \binom{n}{k}a^{k-1} + \ldots + n\binom{n}{n}a^{n-1}$$

Pada kesamaan terakhir ini, jika a = 1, diperoleh seperti yang diinginkan.

4) $(k-1)k(k+1) = \dfrac{(k+1)!3!}{(k-2)!3!} = 3!\dbinom{k+1}{3}$ sehingga

$$\sum_{k=1}^{n} 12\,(k-1)k(k+1) = 72\sum_{k=1}^{n}\binom{k+1}{3}.$$

Selanjutnya, gunakan Teorema 1.7 b) dan diperoleh $72\dbinom{n+2}{4}$.

5) Tulislah teorema binomial kembali dan substitusi a dengan 2. Apakah Anda memperoleh kesamaan berikut ini?

$$\binom{n}{0} + 2\binom{n}{1} + 2^2\binom{n}{2} + \ldots + 2^n\binom{n}{n} = 3^n$$

6) $\dbinom{n}{0} + 2\dbinom{n}{1} + \dbinom{n}{2} + 2\dbinom{n}{3} + \dbinom{n}{4} + \ldots =$

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \ldots + 2(\binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \binom{n}{5} + \ldots) = 2^{n-1} + 2.2^{n-1} = 3.2^{n-1}$$

7) Perhatikan bahwa $k(k+1) = \dfrac{(k+1)!2!}{(k-1)!2!} = 2!\dbinom{k+1}{2}$ sehingga

1.2 + 2.3 + 3.4 + 4.5 +...+ $n(n+1)$ = $2\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\binom{k+1}{2}$, gunakan Teorema 1.7b)

$$= 2\binom{n+2}{3}$$

8) Ingat bahwa $k\dbinom{n}{k} = n\dbinom{n-1}{k-1}$ sehingga

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^k k\binom{n}{k} = n\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\binom{n-1}{k-1} = 0$$

(ingat contoh terakhir pada kegiatan belajar ini).

RANGKUMAN

1. Banyaknya kombinasi r objek yang diambil dari n objek adalah
$$C(n,r)=\binom{n}{r}=\frac{n!}{(n-r)!r!}\ .$$
2. Jika $r\le n$ maka $\binom{n}{r}=\binom{n}{n-r}$.
3. Jika k dan r bilangan-bilangan asli dengan $k > r$, maka
$$\binom{k}{r-1}+\binom{k}{r}=\binom{k+1}{r}.$$
4. Teorema binomial
$$(1+a)^n=\binom{n}{0}+\binom{n}{1}a+\binom{n}{2}a^2+\binom{n}{3}a^3+...+\binom{n}{k}a^k+...+\binom{n}{n}a^n$$
untuk setiap bilangan asli n.
5. Jika n suatu bilangan asli maka
   a. $\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\binom{n}{3}+....+\binom{n}{k}+....+\binom{n}{n}\ =\ 2^n$
   b. $\binom{n}{0}+\binom{n}{2}+\binom{n}{4}+....=\binom{n}{1}+\binom{n}{3}+\binom{n}{5}+...=\ 2^{n-1}$.
6. Jika n, m dan k bilangan-bilangan asli dengan $n > k > m$ maka
$$\binom{n}{k}\binom{k}{m}=\binom{n}{m}\binom{n-m}{k-m}\ .$$
7. Jika n dan k bilangan-bilangan asli dengan $n > k$ maka
$$k\binom{n}{k}=n\binom{n-1}{k-1}.$$
8. Jika n dan k bilangan-bilangan asli dengan $n > k$ maka
   a. $\binom{k}{0}+\binom{k+1}{1}+\binom{k+2}{2}+\binom{k+3}{3}+....+\binom{k+r}{r}=\binom{k+r+1}{r}$
   b. $\binom{k}{k}+\binom{k+1}{k}+\binom{k+2}{k}+\binom{k+3}{k}+....+\binom{k+r}{k}=\binom{k+r+1}{k+1}$.

TES FORMATIF 2

Pilihlah satu jawaban yang paling tepat!

1) Jika n dan k bilangan-bilangan asli dan $n > k$ maka $\binom{n}{k}$ = ….

A. $\dfrac{n!}{(k-n)!k!}$

B. $\dfrac{n!}{k!}$

C. $\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$

D. $\dfrac{k!}{(n-k)!n!}$

2) Dengan notasi kombinatorik, $(k-2)(k-1)k(k+1)$ ditulis sebagai ….

A. $4!\binom{k+2}{4}$

B. $\binom{k+1}{4}$

C. $\binom{k+2}{4}$

D. $4!\binom{k+1}{4}$

3) $\binom{9}{5}+\binom{9}{4}=$ ….

A. $\binom{9}{3}$

B. $\binom{10}{5}$

C. $\binom{9}{6}$

D. $\binom{10}{6}$

4) $\binom{5}{5}+\binom{6}{5}+\binom{7}{5}+...+\binom{19}{5}=$ ….

A. $\binom{20}{6}$

B. $\binom{20}{5}$

C. $\binom{19}{6}$

D. $\binom{19}{4}$

5) $\binom{10}{0}+\binom{11}{1}+\binom{12}{2}+...+\binom{20}{10}=$ ….

A. $\binom{20}{9}$

B. $\binom{20}{11}$

C. $\binom{19}{10}$

D. $\binom{21}{11}$

6) Koefisien dari suku yang memuat a^9 dari penjabaran $(a + 1)^{15}$ adalah ….

A. $\binom{9}{6}$

B. $\binom{15}{6}$

C. $\binom{14}{9}$

D. $\binom{14}{6}$

7) Apabila $(2a - b)^{11}$ diuraikan, koefisien dari suku yang memuat ab^{10} adalah ….
A. 22
B. 11264
C. 1024
D. 110

8) $(n-1)(n+1)n = \ldots.$

A. $3\binom{n}{3}$

B. $3\binom{n-1}{2}$

C. $2\binom{n+1}{3}$

D. $2\binom{n-1}{3}$

9) $10\binom{9}{6} = \ldots.$

A. $11\binom{10}{6}$

B. $9\binom{10}{6}$

C. $6\binom{10}{6}$

D. $5\binom{10}{5}$

10) $\binom{10}{6}\binom{6}{2} = \ldots.$

A. $\binom{10}{2}\binom{9}{6}$

B. $\binom{10}{6}\binom{10}{2}$

C. $\binom{10}{2}\binom{9}{5}$

D. $\binom{10}{5}\binom{10}{2}$

Cocokkanlah jawaban Anda dengan Kunci Jawaban Tes Formatif 2 yang terdapat di bagian akhir modul ini. Hitunglah jawaban yang benar. Kemudian, gunakan rumus berikut untuk mengetahui tingkat penguasaan Anda terhadap materi Kegiatan Belajar 2.

$$\text{Tingkat penguasaan} = \frac{\text{Jumlah Jawaban yang Benar}}{\text{Jumlah Soal}} \times 100\%$$

Arti tingkat penguasaan: 90 - 100% = baik sekali
80 - 89% = baik
70 - 79% = cukup
< 70% = kurang

Apabila mencapai tingkat penguasaan 80% atau lebih, Anda dapat meneruskan dengan modul selanjutnya. **Bagus!** Jika masih di bawah 80%, Anda harus mengulangi materi Kegiatan Belajar 2, terutama bagian yang belum dikuasai.

Kunci Jawaban Tes Formatif

Tes Formatif 1

1) D. Jika n disubstitusi dengan 1, 2, dan 3, hal itu akan menghasilkan pernyataan-pernyataan yang salah.
2) D. Apabila n disubstitusi dengan 1, 2, dan 3, hal itu akan menghasilkan pernyataan-pernyataan yang salah.
3) C. $U_1 = 4$, $U_2 = 4 + 1.6$, $U_3 = 4 + 2.6$, dan seterusnya.
4) C. $S_1 = 4$, $S_2 = 4+1.6$, $S_3 = 4+3.6$, $S_4 = 4+6.6,\ldots$, $Sn = 4+\frac{1}{2}n(n\text{-}1)6$.
5) B. Pada ruas kanan, batas atas tanda sigma menjadi $n + 1$ dan pada ruas kirinya, n diganti dengan $n + 1$.
6) A. Gantilah n dengan $n + 1$ dan diuraikan.
7) A. Deret geometri dengan suku awal a dan rasio t.
8) B. Substitusi n dengan 1.
9) B. Kerjakan seperti petunjuk nomor 4.
10) B. Gantilah batas atasnya dengan $n + 1$.

Tes Formatif 2

1) C. Ingat rumus kombinasi C(n, k).
2) D. $\dfrac{4!(k+1)!}{4!(k-3)!} = 4!\dbinom{k+1}{4}$.
3) B. Ingat Teorema 1 .2.
4) A. Ingat Teorema 1.7 b).
5) D. Ingat Teorema 1.7 a).
6) B. Terapkan teorema binomial dan gunakan sifat simetrik.
7) A. Terapkan teorema binomial.
8) C. $(n-1)(n+1)n = \dfrac{1}{3}\dfrac{3!(n+1)!}{3!(n-2)!}$.
9) D. Terapkan Teorema 1.6.
10) C. Gunakan Teorema 1.5.

Daftar Pustaka

Apostol, Tom M. 1983. *Introduction to Analytic Number Theory*. New York: John Wiley & Sons.

Burton, David M. 1986. *Elementary Number Theory Revised Printing*. Boston: Allyn and Bacon, Inc.

Dudley, Underwood. 1969. *Elementary Number Theory*. San Francisco: W.H. Freeman and Company.

Rosen, Kenneth H. 1993. *Elementary Number Theory and Its Applications*. Edisi ketiga. New York: Addision-Wesley Publishing Company.

Shapiro, Harold N. 1995. *Introduction to the Theory of Numbers*. New York: Springer-Verlag.

Sukirman. 2005. *Pengantar Teori Bilangan*. Yogyakarta: Hanggar Kreator Yogyakarta.

________. 1994/1995. *Teori Bilangan*. Jakarta: Proyek Peningkatan Mutu Guru SLTP.

Tucker, Alan. 1980. *Applied Combinatorics.* Edisi kedua. New York: John Wiley & Sons.