PDF-XChange Viewer
Click to buy NOW!
www.docu-track.com

C. Determinan dan Invers Matriks

C. 1. Determinan

Suatu matriks persegi selalu dapat dikaitkan dengan suatu bilangan yang disebut *determinan*. Determinan dari matriks persegi A dinotasikan dengan $|A|$.

Untuk matriks A berordo 2 × 2, determinan matriks A didefinisikan sebagai berikut.

> Jika $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, maka determinan matriks A adalah $|A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$.

Adapun untuk matriks B berordo 3 × 3, determinan matriks B ini didefinisikan sebagai berikut menggunakan kaidah Sarrus.

Jika $B = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$, maka determinan matriks B adalah

$$|B| = \left|\begin{array}{ccc|cc} a & b & c & a & b \\ d & e & f & d & e \\ g & h & i & g & h \end{array}\right. = aei + bfg + cdh - ceg - afh - bdi$$

Contoh

Diketahui matriks $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ dan $B = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 4 \\ 1 & 5 & -6 \\ -3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

Tentukanlah $|A|$ dan $|B|$.

Jawab:

$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - (-2)3 = 4 + 6 = 10$

Jadi, $|A| = 10$.

$$|B| = \left|\begin{array}{ccc|cc} 2 & -3 & 4 & 2 & -3 \\ 1 & 5 & -6 & 1 & 5 \\ -3 & 4 & 1 & -3 & 4 \end{array}\right.$$

$= 2 \cdot 5 \cdot 1 + (-3)(-6)(-3) + 4 \cdot 1 \cdot 4 - 4 \cdot 5 \cdot (-3) - 2 \cdot (-6) \cdot 4 - (-3) \cdot 1 \cdot 1$

$= 10 - 54 + 16 + 60 + 48 + 3 = 83$

Jadi, $|B| = 83$.

PDF-XChange Viewer Click to buy NOW! www.docu-track.com

Asah Kompetensi 4

1. Tentukanlah determinan dari setiap matriks berikut

$$A = \begin{pmatrix} 8 & -2 \\ -3 & -\frac{1}{4} \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ 8 & 16 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -10 & 17 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} -2 & -3 & -4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},\ E = \begin{pmatrix} 0 & 8 & 12 \\ 22 & -1 & -6 \\ -10 & -7 & 14 \end{pmatrix},\ \text{dan } F = \begin{pmatrix} 9 & -9 & 0 \\ -3 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

2. Tentukanlah nilai x dari setiap persamaan berikut

a. $\begin{vmatrix} 2x & x+1 \\ 3 & x+5 \end{vmatrix} = 1$

b. $\begin{vmatrix} 2x & -3 \\ x-1 & x-1 \end{vmatrix} = 0$

c. $\begin{vmatrix} 6-x & 0 \\ 6 & 5-x \end{vmatrix} = 0$

d. $\begin{vmatrix} x+1 & x \\ 2 & x-1 \end{vmatrix} = -2$

e. $\begin{vmatrix} 2x-1 & -3 \\ -x & x+1 \end{vmatrix} = 3$

f. $\begin{vmatrix} -2x & 3 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = 6$

3. Diketahui matriks A dan B sebagai berikut.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ dan } B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 7 & 1 & 2 \\ 5 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Buktikan bahwa $|AB| = |A||B|$.

Siapa Berani

Tanpa mengevaluasi determinan secara langsung, tunjukkan bahwa:

$$\begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha & \sin(\alpha+\theta) \\ \sin\beta & \cos\beta & \sin(\beta+\theta) \\ \sin\gamma & \cos\gamma & \sin(\gamma+\theta) \end{vmatrix} = 0$$

Sumber : *Elementary Linear Algebra*

PDF-XChange Viewer Click to buy NOW! www.docu-track.com
PDF-XChange Viewer Click to buy NOW! www.docu-track.com

2. Invers Matriks

Matriks persegi A mempunyai invers, jika ada matriks B sedemikian hingga $AB = BA = I_{n \times n}$ dengan I matriks identitas. Pada persamaan $AB = BA = I_{n \times n}$, A dan B disebut *saling invers*. Berikut ini adalah syarat suatu matriks A mempunyai invers.

- Jika $|A| = 0$, maka matriks A tidak mempunyai invers. Oleh karena itu, dikatakan matriks A sebagai matriks singular.
- Jika $|A| \neq 0$, maka matriks A mempunyai invers. Oleh karena itu, dikatakan matriks A sebagai matriks nonsingular.

Contoh

Tunjukkan bahwa $A = \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ dan $B = \begin{pmatrix} 3 & -7 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$ saling invers!

Jawab:

Kita harus membuktikan bahwa $AB = BA = I_{2 \times 2}$.

$$AB = \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -7 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} 3 & -7 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Perhatikan bahwa bentuk $AB = BA = I_{2 \times 2}$ sehingga dapat dikatakan bahwa A dan B saling invers.

Catatan

Sifat-sifat invers matrik:
1. $(A^{-1})^{-1} = A$
2. $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
3. $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

Untuk matriks $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ berordo 2×2 ini, kita dapat menentukan inversnya sebagai berikut.

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \operatorname{Adj} A$$

$$= \frac{1}{ad - bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Untuk menentukan invers suatu matriks dengan ordo 3×3, kalian harus memahami tentang matriks minor, kofaktor, dan adjoint.

a. *Matriks Minor*

Matriks minor M_{ij} diperoleh dengan cara menghilangkan elemen-elemen pada baris ke-i dan kolom ke-j matriks A berordo 3×3, sehingga didapat matriks baru dengan ordo 2×2. Determinan dari matriks tersebut disebut minor dari determinan matriks A, ditulis dengan $|M_{ij}|$.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Minor-minor dari matriks A adalah sebagai berikut.

$$|M_{11}| = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad |M_{21}| = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad |M_{31}| = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$$

$$|M_{12}| = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} \quad |M_{22}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} \quad |M_{32}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}$$

$$|M_{13}| = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \quad |M_{23}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \quad |M_{33}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

b. *Kofaktor*

Kofaktor dari baris ke-i dan kolom ke-j dituliskan dengan A_{ij}. Untuk menentukannya ditentukan dengan rumus

$$A_{ij} = (-1)i + j\ |M_{ij}|$$

Kofaktor-kofaktor dari matriks A adalah sebagai berikut.

$A_{11} = (-1)^{1+1}\ |M_{11}| = |M_{11}|$
$A_{12} = (-1)^{1+2}\ |M_{12}| = -|M_{12}|$
$A_{13} = (-1)^{1+3}\ |M_{13}| = |M_{13}|$
$A_{21} = (-1)^{2+1}\ |M_{21}| = -|M_{21}|$
$A_{22} = (-1)^{2+2}\ |M_{22}| = |M_{22}|$
$A_{23} = (-1)^{2+3}\ |M_{23}| = -|M_{23}|$
$A_{31} = (-1)^{3+1}\ |M_{31}| = |M_{31}|$
$A_{32} = (-1)^{3+2}\ |M_{32}| = -|M_{32}|$
$A_{33} = (-1)^{3+3}\ |M_{33}| = |M_{33}|$

c. *Adjoint*

Misalkan suatu matriks A berordo $n \times n$ dengan A_{ij} kofaktor dari matriks A, maka

$$\text{Adjoint}\, A\ (\text{Adj}\, A) = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nm} \end{pmatrix}$$

Untuk matriks A berordo 3×3, maka

$$\text{Adj}\, A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$$

PDF-XChange Viewer Click to buy NOW! www.docu-track.com

PDF-XChange Viewer Click to buy NOW! www.docu-track.com

Contoh

Tentukan invers dari matriks $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{pmatrix}$.

Jawab:

$$|A| = \left|\begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \\ 1 & 0 \end{matrix}$$

$$\begin{aligned}
&= 40 + 6 + 0 - 15 - 0 - 32 \\
&= 46 - 47 \\
&= -1
\end{aligned}$$

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 0 & 8 \end{vmatrix} = 40 - 0 = 40$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 8 \end{vmatrix} = -(16 - 3) = -13$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 5 = -5$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 8 \end{vmatrix} = -(16 - 0) = -16$$

$$A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 8 \end{vmatrix} = 8 - 3 = 5$$

$$A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -(0 - 2) = 2$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = 6 - 15 = -9$$

$$A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -(3 - 6) = 3$$

$$A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 5 - 4 = 1$$

$$\text{Adj } A = \begin{pmatrix} 40 & -16 & -9 \\ -13 & 5 & 3 \\ -5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{\text{Adj } A}{|A|} = \frac{\begin{pmatrix} 40 & -16 & -9 \\ -13 & 5 & 3 \\ -5 & 2 & 1 \end{pmatrix}}{-1} = \begin{pmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

PDF-XChange Viewer Click to buy NOW! www.docu-track.com
PDF-XChange Viewer Click to buy NOW! www.docu-track.com

Untuk menentukan determinan dari matriks berordo 3 × 3, se[...] dengan kaidah Sarrus, dapat juga digunakan matriks minor dan kofaktor.

Misalkan matriks $A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}$

Determinan matriks A (det A) dapat ditentukan menggunakan rumus:

(i) $|A| = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}$
$= a_{11}|M_{11}| - a_{12}|M_{12}| + a_{13}|M_{13}|$
$= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$

(ii) $|A| = a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23}$
$= -a_{21}|M_{21}| + a_{22}|M_{22}| - a_{23}|M_{23}|$
$= -a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{22}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{23}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$

(iii) $|A| = a_{31}A_{31} + a_{32}A_{32} + a_{33}A_{33}$
$= a_{31}|M_{31}| - a_{32}|M_{32}| + a_{33}|M_{33}|$
$= a_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} - a_{32}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} + a_{33}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$

Contoh

Tentukan determinan dari matriks $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.

Jawab:

Untuk menentukan determinannya, dapat digunakan ketiga rumus yang telah dijelaskan di atas. Gunakan salah satu rumus tersebut.

$$\begin{aligned} |B| &= a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} \\ &= 1 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} - 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \\ &= 1 \cdot (16 - 9) - 3 \cdot (4 - 3) + 3 \cdot (3 - 4) \\ &= 7 - 3 - 3 \\ &= 1 \end{aligned}$$

Asah Kompetensi 5

1. Tentukanlah invers dari setiap matriks berikut!

$A = \begin{pmatrix} -3 & -5 \\ 14 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 6 & 15 \\ -2 & -5 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} \frac{1}{2(a-b)} & \frac{1}{2(a+b)} \\ \frac{1}{2(a-b)} & \frac{1}{2(a+b)} \end{pmatrix}$,

PDF-XChange Viewer Click to buy NOW! www.docu-track.com

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & -3 \\ 3 & 6 & -8 \end{pmatrix}, \text{ dan } E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

2. Tentukanlah nilai x sehingga setiap matriks berikut singular!

$$A = \begin{pmatrix} x & 9 \\ 1 & 3x \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} x & 9 \\ 4 & x \end{pmatrix}, \text{ dan } C = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 8 & x+2 & x \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

3. Diketahui matriks $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Jika matriks $(A - kI)$ adalah matriks singular, tentukanlah nilai k!

4. Diketahui matriks $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ dan $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$. Jika $XA = B$, tentukanlah matriks X.

EBTANAS 1995

3 ASAH KEMAMPUAN

Waktu : 60 menit

1. Tentukanlah syarat agar matriks $\begin{pmatrix} a-b & a \\ a & a+b \end{pmatrix}$ tidak mempunyai invers.

Bobot soal: 10

2. Diketahui matriks $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$. Tunjukkan bahwa $(A^{-1})^t = (A^t)^{-1}$.

Bobot soal: 10

3. Diketahui matriks $A = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ dan $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$.

Jika $|A^t| = k|A^t|$, tentukanlah nilai k.

EBTANAS 1997

Bobot soal: 50

4. Tunjukkan bahwa $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & 7 & 5 \\ 3 & 8 & 7 & 9 & 8 \\ 3 & 4 & 1 & 6 & 2 \\ 4 & 0 & 2 & 2 & 3 \\ 7 & 9 & 1 & 5 & 4 \end{vmatrix}$ habis dibagi 19.

Bobot soal: 30