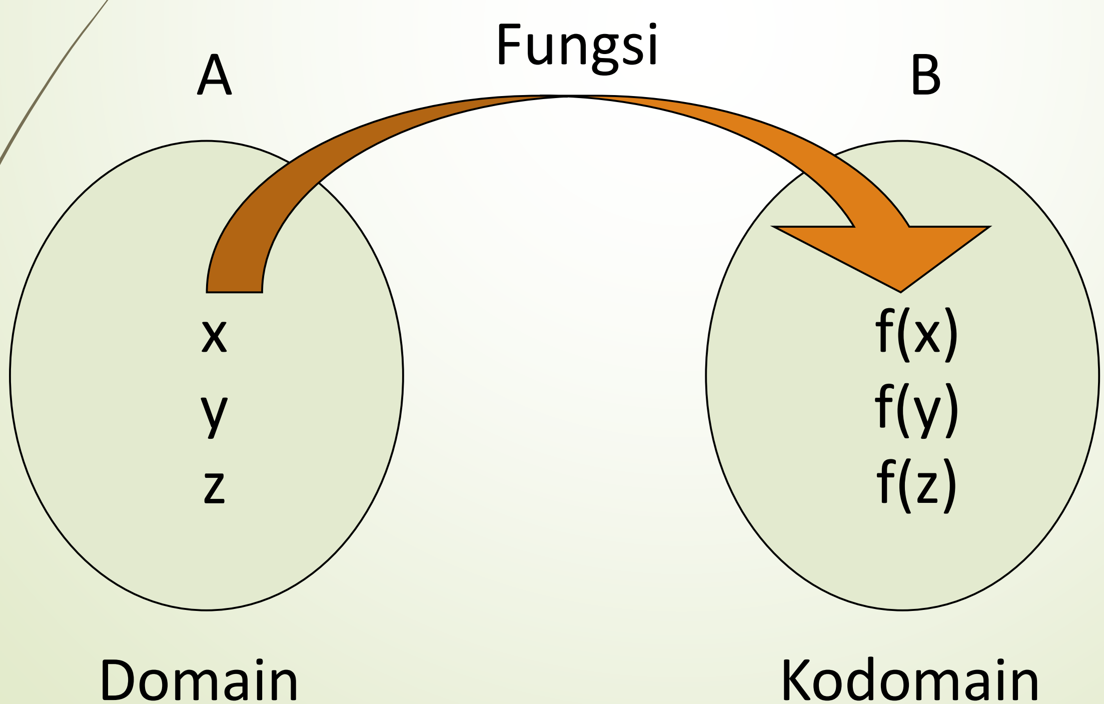
FUNGSI

MATEMATIKA SISTEM INFORMASI 1

PENGERTIAN FUNGSI

- *A* disebut **daerah asal** (domain) dari *f* dan *B* disebut **daerah hasil** (Kodomain) dari *f*.
- Nama lain untuk fungsi adalah **pemetaan** atau **transformasi**.



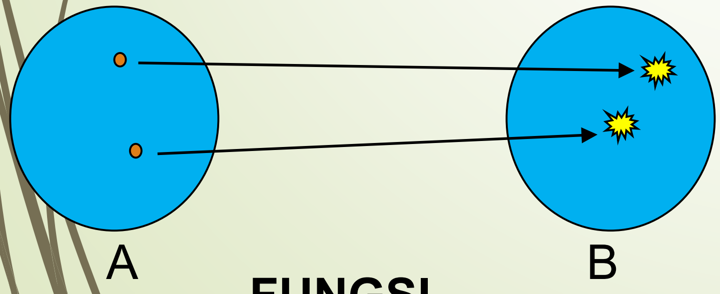
D_f = domain fungsi f

R_f = range kodomain

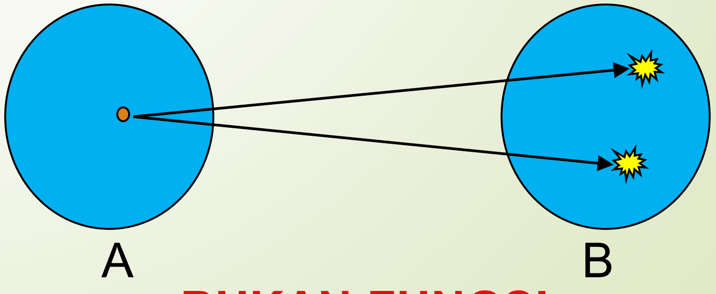
PENGERTIAN FUNGSI

- Definisi : Misalkan A dan B dua himpunan takkosong. Fungsi dari A ke B adalah aturan yang mengaitkan setiap anggota A **dengan tepat satu** anggota B.

- *ATURAN :*
  - Setiap anggota A harus habis terpasang dengan anggota B.
  - Tidak boleh membentuk cabang.

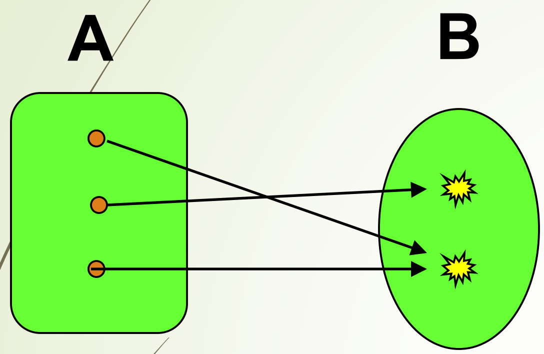


FUNGSI

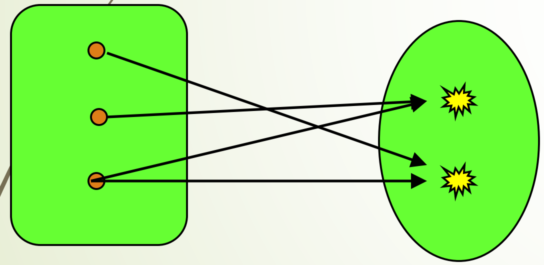


BUKAN FUNGSI

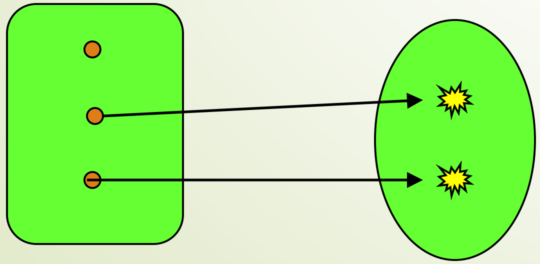
ILUSTRASI FUNGSI



Fungsi

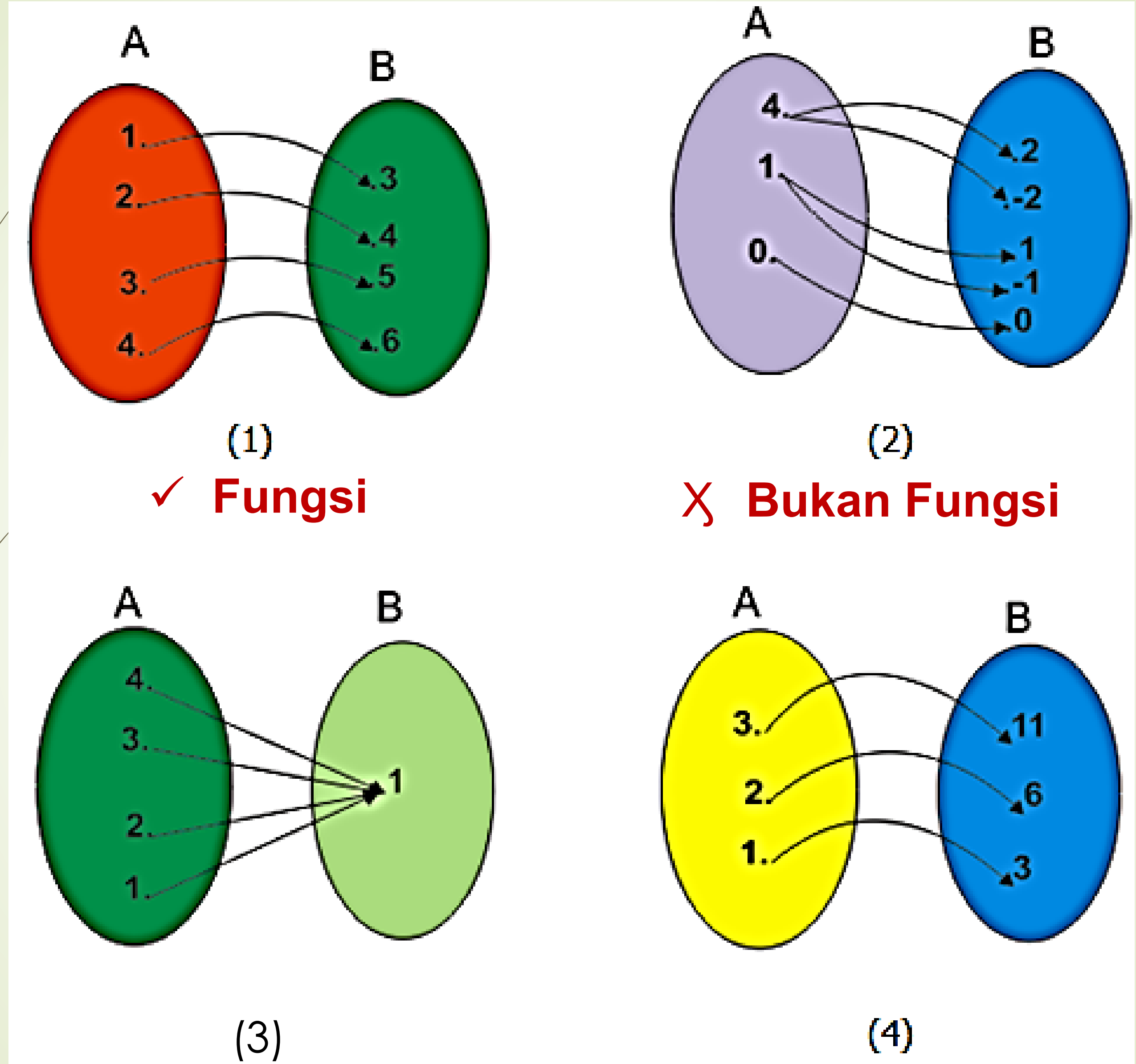


Bukan fungsi, sebab ada elemen A yang mempunyai 2 kawan.



Bukan fungsi, sebab ada elemen A yang tidak mempunyai kawan.

CONTOH



(1) ✓ **Fungsi**

(2) ☓ **Bukan Fungsi**

(3) ✓ **Fungsi**

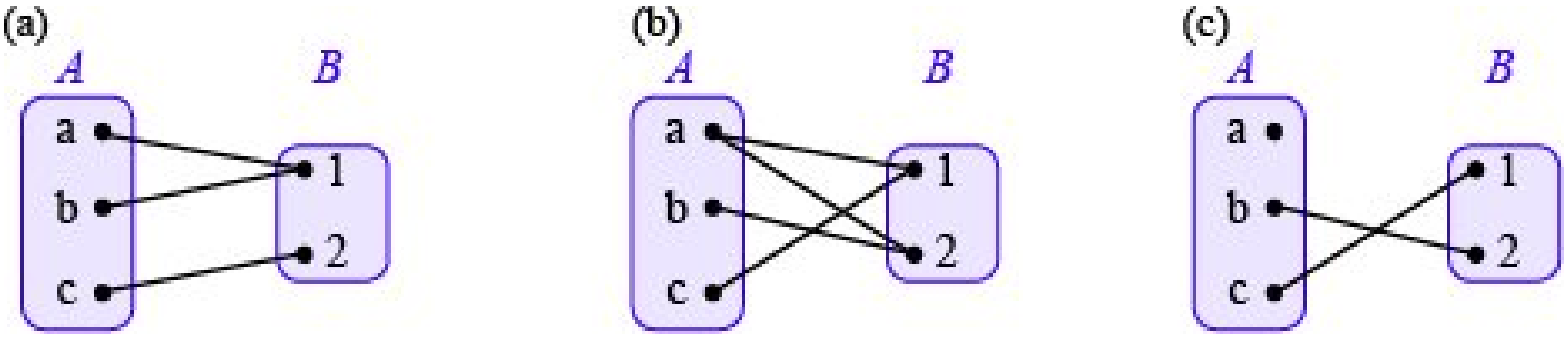
(4) ✓ **Fungsi**

- Pada gambar 1, 3 dan 4 setiap anggota himpunan A mempunyai pasangan tepat satu anggota himpunan B. Relasi yang memiliki ciri seperti itu disebut fungsi atau pemetaan.

- Pada gambar 2 bukan fungsi karena ada anggota A yang punya pasangan lebih dari satu anggota B.

CONTOH

Dari diagram-diagram panah berikut, manakah yang merupakan fungsi?



Jawab :

- Diagram panah (a) merupakan fungsi karena setiap anggota A dipasangkan dengan tepat satu anggota B.
- Diagram panah (b) bukan merupakan fungsi karena ada anggota A, yaitu a, mempunyai dua pasangan anggota B, yaitu 1 dan 2.
- Diagram panah (c) bukan merupakan fungsi karena ada anggota A, yaitu a, tidak mempunyai pasangan anggota B

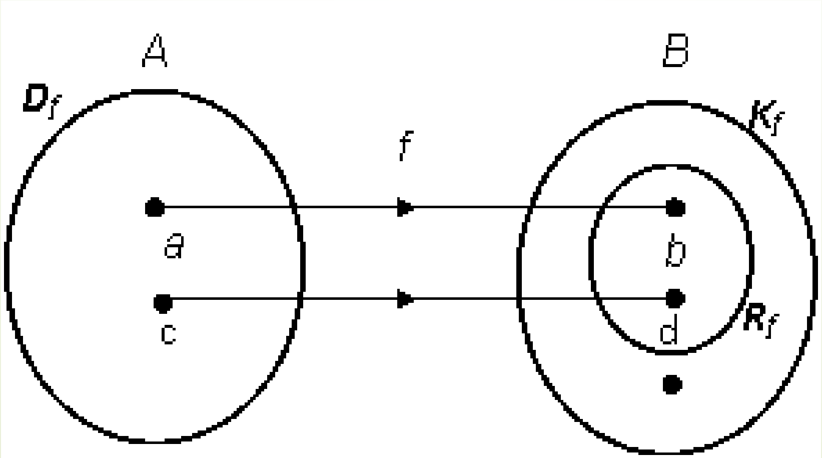
CONTOH

- Diketahui :
  1. { (-1,2), (-4,51), (1,2), (8,-51) }
  2. { (13,14), (13,5) , (16,7), (18,13) }
  3. { (3,90), (4,54), (6,71), (8,90) }
  4. { (3,4), (4,5), (6,7), (8,9) }
  5. { (3,4), (4,5), (6,7), (3,9) }
  6. { (-3,4), (4,-5), (0,0), (8,9) }
  7. { (8, 11), (34,5), (6,17), (8,19) }

- Ditanya :
  Carilah yang merupakan fungsi
- Jawab : 1, 3, 4,6

- Jika $f(a) = b$, maka b dinamakan **bayangan** (*image*) dari a dan a dinamakan **pra-bayangan** (*pre-image*) dari b.

- Himpunan yang berisi semua nilai pemetaan f disebut **jelajah** (*range*) dari f. Perhatikan bahwa jelajah dari f adalah himpunan bagian (mungkin *proper subset*) dari B.



D_f = domain fungsi f

R_f = range kodomain

PENYAJIAN FUNGSI

- Fungsi dapat disajikan dalam berbagai bentuk, diantaranya:
  1. Himpunan pasangan terurut.
     Seperti pada relasi.

  2. Formula pengisian nilai (*assignment*).
     Contoh: $f(x) = 2x + 10$, $f(x) = x^2$, dan $f(x) = 1/x$.

✓ Contoh 1:

Relasi $f = \{(1, u), (2, v), (3, w)\}$
dari $A = \{1, 2, 3\}$ ke $B = \{u, v, w\}$ adalah fungsi dari A ke B.

Di sini $f(1) = u$, $f(2) = v$, dan $f(3) = w$.
Daerah asal dari f adalah A dan daerah hasil adalah B. Jelajah dari f adalah $\{u, v, w\}$, yang dalam hal ini sama dengan himpunan B.

✓ Contoh 2:

Relasi $f = \{(1, u), (2, u), (3, v)\}$
dari $A = \{1, 2, 3\}$ ke $B = \{u, v, w\}$ adalah fungsi dari A ke B,

meskipun u merupakan bayangan dari dua elemen A.
Daerah asal fungsi adalah A, daerah hasilnya adalah B, dan jelajah fungsi adalah $\{u, v\}$.

✓ **Contoh 3.**

Relasi $f = \{(1, u), (2, v), (3, w)\}$ dari $A = \{1, 2, 3, 4\}$ ke $B = \{u, v, w\}$ bukan fungsi, karena tidak semua elemen A dipetakan ke B.

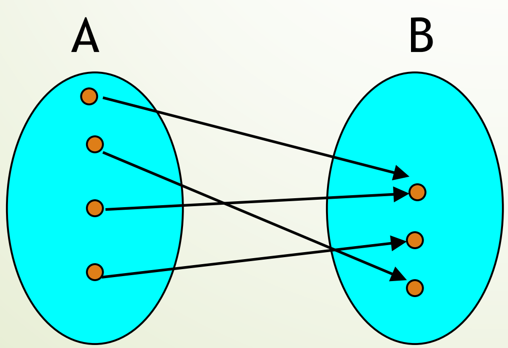
✓ **Contoh 4.**

Relasi $f = \{(1, u), (1, v), (2, v), (3, w)\}$ dari $A = \{1, 2, 3\}$ ke $B = \{u, v, w\}$ bukan fungsi, karena 1 dipetakan ke dua buah elemen B, yaitu u dan v.

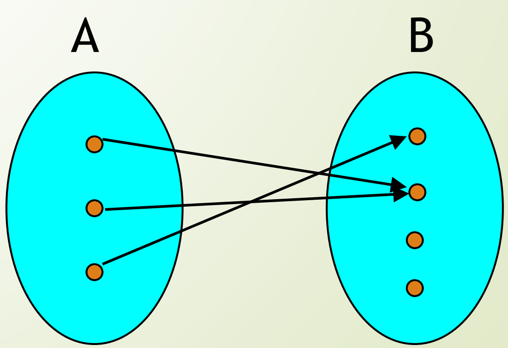
FUNGSI SURJEKTIF (ONTO)

- Fungsi *f* dikatakan dipetakan **pada** (*onto*) atau **surjektif** (*surjective*) jika setiap elemen himpunan *B* merupakan bayangan dari satu atau lebih elemen himpunan *A*.

- Dengan kata lain seluruh elemen *B* merupakan jelajah dari *f*. Fungsi *f* disebut fungsi **pada** himpunan *B*.



Pada



Tidak Pada

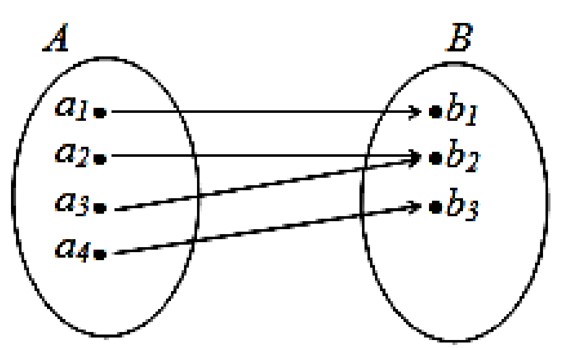
CONTOH

Diketahui Relasi:
$f = \{(1, u), (2, u), (3, v)\}$ dari $A = \{1, 2, 3\}$ ke $B = \{u, v, w\}$

- ❖ **bukan fungsi pada**
  karena *w* tidak termasuk jelajah dari *f*.

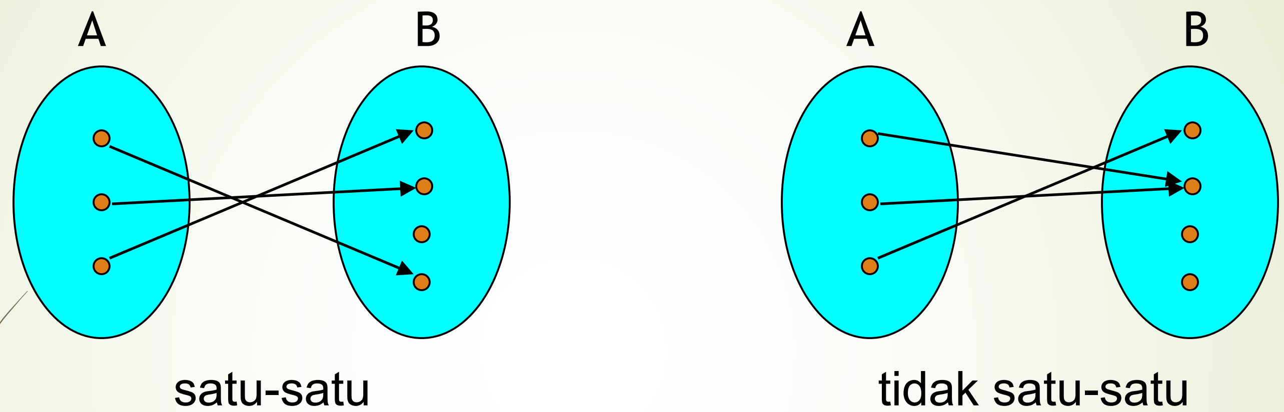
Diketahui Relasi:
$f = \{(1, w), (2, u), (3, v)\}$ dari $A = \{1, 2, 3\}$ ke $B = \{u, v, w\}$

- ❖ **Fungsi pada**
  karena semua anggota *B* merupakan jelajah dari *f*.



f fungsi surjektif dari himpunan *A* ke himpunan *B*

FUNGSI SATU-SATU (INJEKTIF)



- Fungsi *f* dikatakan **satu-ke-satu** (*one-to-one*) atau **injektif** (*injective*) jika tidak ada dua elemen himpunan *A* yang memiliki bayangan sama.

CONTOH

$f = \{(1, w), (2, u), (3, v)\}$

dari $A = \{1, 2, 3\}$ ke $B = \{u, v, w, x\}$ adalah **fungsi satu-ke-satu,**

Tetapi relasi

$f = \{(1, u), (2, u), (3, v)\}$

dari $A = \{1, 2, 3\}$ ke $B = \{u, v, w\}$ **bukan fungsi** satu-ke-satu, karena $f(1) = f(2) = u$.

LATIHAN

1. Jika A = (a,b,c,d,e), dan B himpunan dari huruf dalam abjad. Misalkan f, g dan h dari A ke dalam B didefinisikan oleh :

   a. f(a) = r, f(b) = a, f(c) = s, f(d) = r, f(e) = e

   b. g(a) = a, g (b) = c, g(c) = 3, g(d) = r, g(e) = s

   c. h(a) = z, h(b) = y, h(c) = x, h(d) = y, h(e) = z

   Nyatakan apakah tiap-tiap fungsi di atas Injektif/surjektif atau tidak keduanya?

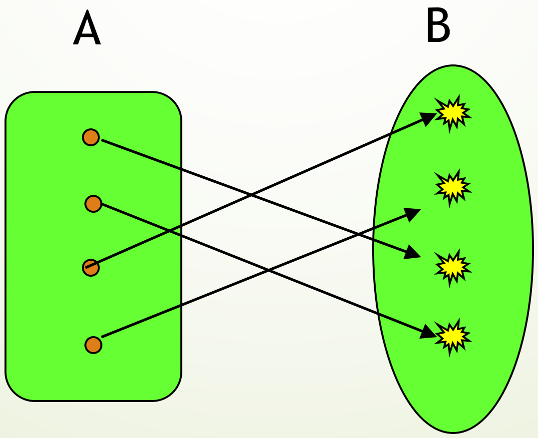
2. Diberikan fungsi f dari {a, b, c, d} ke {1, 2, 3, 4, 5} dengan f(a)=4,f(b)=5, f(c)=1 dan f(d) = 3 merupakan fungsi satu-ke-satu (injektif) ?

3. Apakah fungsi f: R → R dengan $f(x) = x^2$ merupakan fungsi surjektif?

4. Apakah fungsi dari R ke R ini g(x) = x+5 merupakan fungsi injektif?

FUNGSI BIJEKTIF

Fungsi f : A → B dikatakan **berkoresponden satu-satu** atau **bijektif** bila ia **injektif dan surjektif**. Pada fungsi bijektif, setiap anggota B mempunyai tepat satu pra-bayangan di A.



fungsi bijektif

CONTOH

Apakah fungsi f:{a,b,c,d}→ {1,2,3,4} dengan f(a)=4, f(b)=2, f(c)=1 dan f(d)=3 bijektif.

PENYELESAIAN:

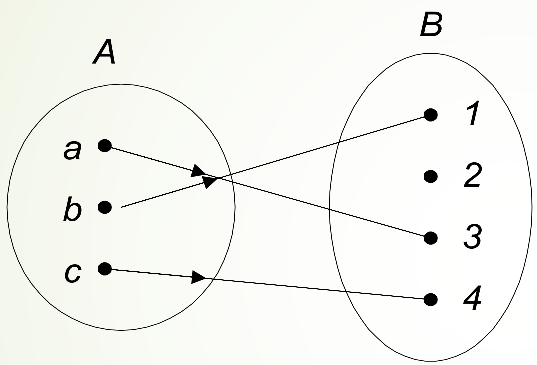
karena semua nilainya berbeda maka **fungsi ini satu-satu (Injektif)**. Karena semua anggota B habis terpasang maka ia **surjektif (Onto)**.

- ❖ **Jadi fungsi ini bijektif.**

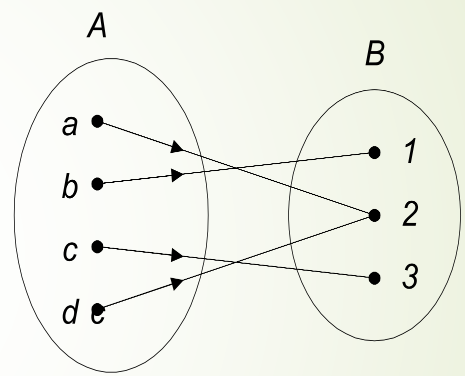
CONTOH

Fungsi $f(x) = x - 1$ merupakan fungsi yang berkoresponden satu-ke-satu, karena f adalah fungsi satu-ke-satu maupun fungsi pada.

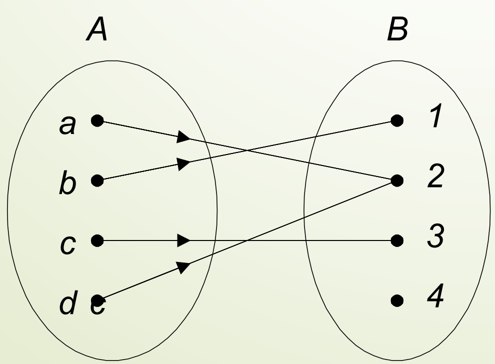
Fungsi satu-ke-satu,
bukan pada



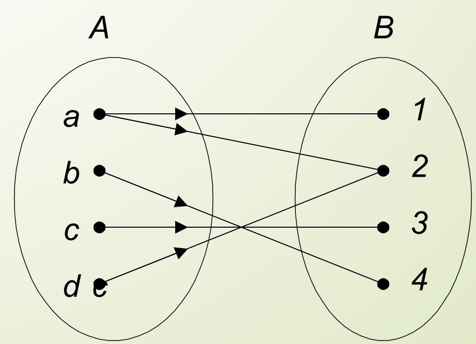
Fungsi pada,
bukan satu-ke-satu



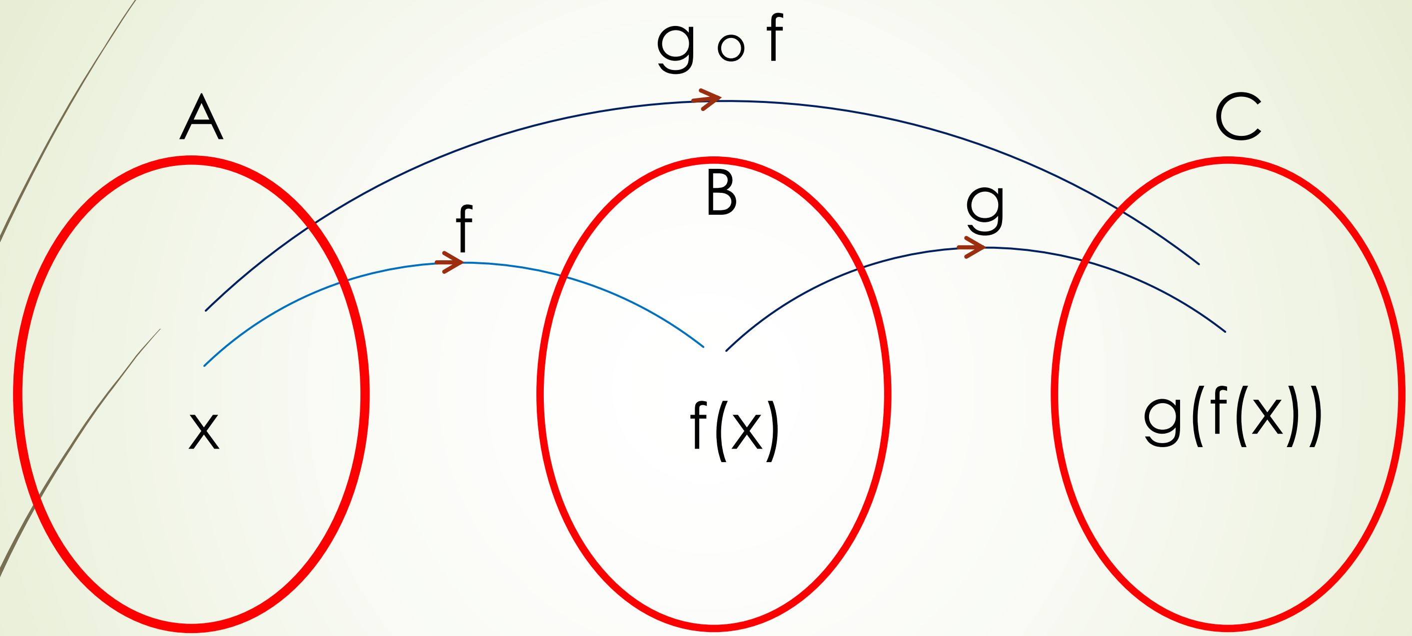
Bukan fungsi satu-ke-satu
maupun pada



Bukan fungsi



KOMPOSISI FUNGSI



(g o f)(x) = g(f(x)) , artinya: f(x) masuk ke g(x)

CONTOH

Jika $f(x) = 2x - 5$ dan $g(x) = 3x + 1$

tentukan: a. $(f \circ g)(x)$ b. $(g \circ f)(x)$ c. $(f \circ g)(4)$

Jawab:

a. $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = 2(3x + 1) - 5 = 6x - 3$

b. $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = 3(2x - 5) + 1 = 6x - 14$

c. $(f \circ g)(4) = 6 . 4 - 3 = 21$

- **$(f \circ g)(x) \neq (g \circ f)(x)$** Jadi pada komposisi fungsi tidak berlaku sifat komutatif.

CONTOH

Jika $(f \circ g)(x) = 6x - 5$ dan $g(x) = 2x + 1$ maka $f(x) = ?$

Jawab:

Cara 1 : $(f \circ g)(x)$ & $g(x)$ linear $\rightarrow$ misal $f(x) = ax + b$

$(f \circ g)(x) = f(g(x))$ $\quad 6x - 5 = a(2x + 1) + b = 2ax + a + b$

$2a = 6 \rightarrow a = 3 \qquad a + b = -5 \rightarrow b = -8$

didapat $f(x) = 3x - 8$ $\quad$ cek $(f \circ g)(x) = \ldots\ldots ?$

Cara 2 : yg diketahui $(f \circ g)(x)$ dan $g(x)$

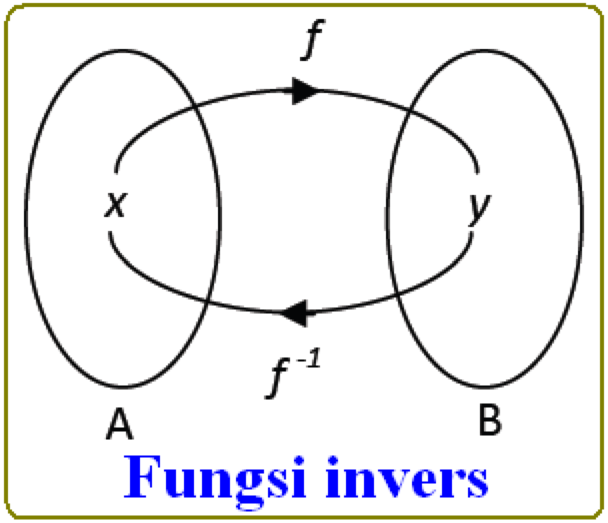
misal $g(x) = 2x + 1 = a$ $\quad x = \dfrac{a-1}{2}$ $\quad f(a) = 6\left(\dfrac{a-1}{2}\right) - 5$

$f(x) = 3x - 8$

FUNGSI INVERS

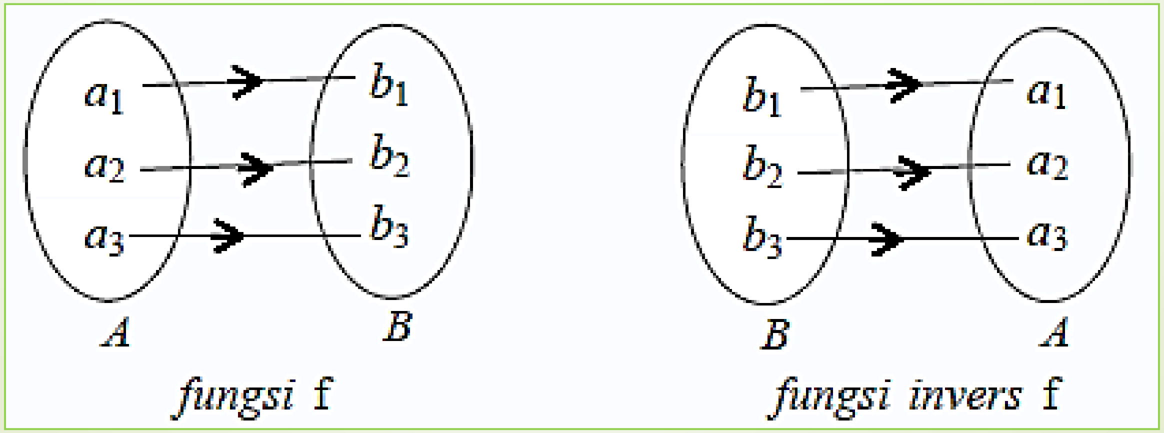
- Jika f adalah fungsi berkoresponden satu-ke-satu dari A ke B, maka kita dapat menemukan **balikan** (*invers*) dari f.

- Balikan fungsi dilambangkan dengan f^{-1}. Misalkan a adalah anggota himpunan A dan b adalah anggota himpunan B, maka $f^{-1}(b) = a$ jika $f(a) = b$.



FUNGSI INVERS

- Fungsi yang berkoresponden satu-ke-satu sering dinamakan juga fungsi yang ***invertible*** (dapat dibalikkan), karena kita dapat mendefinisikan fungsi balikannya. Sebuah fungsi dikatakan ***not invertible*** (tidak dapat dibalikkan) jika ia bukan fungsi yang berkoresponden satu-ke-satu, karena fungsi balikannya tidak ada.



CONTOH

- Relasi $f = \{(1, u), (2, w), (3, v)\}$ dari $A = \{1, 2, 3\}$ ke $B = \{u, v, w\}$ adalah fungsi yang berkoresponden satu-ke-satu. Balikan fungsi f adalah

  $f^{-1} = \{(u, 1), (w, 2), (v, 3)\}$

  - Jadi, f adalah **fungsi *invertible*.**

- Tentukan balikan fungsi $f(x) = x - 1$.

Penyelesaian:
Fungsi $f(x) = x - 1$ adalah fungsi yang berkoresponden satu-ke-satu, jadi balikan fungsi tersebut ada.
Misalkan $f(x) = y$, sehingga $y = x - 1$, maka $x = y + 1$.
Jadi, balikan fungsi balikannya adalah $f^{-1}(y) = y + 1$.

CONTOH

- Tentukan rumus fungsi invers dari fungsi $f(x) = 2x + 6$

- Jawab :

  $y = f(x) = 2x+6$

  $y = 2x+6$

  $2x = y-6$

  $x = ½(y-6)$

  Jadi : $f^{-1}(y) = ½(y-6)$ atau $f^{-1}(x) = ½(x-6)$

CONTOH

- Diketahui :
  $f(x) = x+3$
  $g(x) = 5x - 2$
  Hitunglah $(f \circ g)^{-1}(x)$

- Cara 1
  $(f \circ g)(x) = f(g(x))$
  $= g(x) + 3$
  $= 5x-2+3$
  $= 5x+1$
  $(f \circ g)^{-1}(x) = y = 5x+1$
  $5x = y-1$
  $x = (y-1)/5$
  $(f \circ g)^{-1}(x) = \frac{1}{5}x - \frac{1}{5}$

- Cara 2 :

$$f(x) = x+3$$
$$\Leftrightarrow y = x+3$$
$$\Leftrightarrow x = y-3$$
$$\Leftrightarrow f^{-1}(x) = x-3$$
$$g(x) = 5x-2$$
$$\Leftrightarrow y = 5x-2$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{5}y + \frac{2}{5}$$
$$\Leftrightarrow g^{-1}(x) = \frac{1}{5}x + \frac{2}{5}$$
$$(f \circ g)^{-1}(x) = (g^{-1} \circ f^{-1})(x)$$
$$= g^{-1}(f^{-1}(x))$$
$$= \frac{1}{5}(x-3) + \frac{2}{5}$$
$$= \frac{1}{5}x - \frac{1}{5}$$

LATIHAN

1. Misalkan f fungsi dari {a, b, c} ke {1, 2, 3} dengan aturan f(a)=2, f(b)=3 dan f(c)=1. Apakah f invertibel? Jika ya, tentukan inversnya!

2. Misalkan f fungsi dari Z ke Z dengan $f(x) = x^2$. Apakah f invertibel? Jika ya, tentukan inversnya!

3. Diketahui :

   $f(x) = x - 2$

   $g(x) = -2x + 1$

   Hitunglah

   1. $(f \circ g)^{-1}(x)$
   2. $(g \circ f)^{-1}(x)$

4. Diketahui : $f(x) = x^2 + 1$ dan $g(x) = 2x - 3$.
   Maka $(f \circ g)(x)$ dan $(g \circ f)(x)$

5. Jika $(f \circ g)(x) = 6x - 5$ dan $f(x) = 2x + 1$
   maka $g(x) = ?$

FINISH...